UNIVERSITE Felix HOUPHOUËT-BOIGNY DE COCODY

UFR-SHS DEPARTEMENT DE PHILOSOPHIE

…………………………………………………..

Licence 1

Cours optionnel

Aout 2020

Mathématiques et société

« Mathématiques et environnement socioculturel »

A. N'GUESSAN Depry

INTRODUCTION

Il s’agit, à travers ce cours optionnel, de fournir des pistes de réflexion et de réponses à des questions explicites ou implicites concernant les mathématiques au regard de leur histoire, et de leur développement.

Les mathématiques offrent-elles essentiellement des débats de type mathématique ? Non. Outre leur dimension technique, les mathématiques présentent une dimension théologico-métaphysique, sociétale, heuristique, anthropologique, et donc une dimension culturelle.

Existe-t-il des sociétés d’où sont absentes des considérations mathématiques ? Non. Les systèmes d’énumération et les bases d’énumération sont des éléments qu’on rencontre partout. L’anthropologie culturelle en donne les traces. Les termes « ethnomathématique », « mathématique congélée », « sociomathématique », dépouillés de leur caractère parfois péjoratif, sont une indication des stades primitivement culturels de la manifestation de l’esprit mathématique dans toutes les civilisations humaines. C’est une version, de l’immanentisme pythagoricien et du pan-mathématisme spinoziste.

Pourquoi dans toutes les sociétés existantes, on ne constate pas une pratique égale des mathématiques ? C’est un fait de l’histoire que toutes les sociétés, pour des raisons objectives, n’aient pas bénéficié d’un égal développement des mathématiques.

Pourquoi éprouve-t-on un intérêt pour les mathématiques ? Deux axes de réponses. Pour la thèse de la **contemplation**, les mathématique élèvent l’âme vers la vérité, l’intelligible, l’universel. Pour les instrumentalistes, les mathématiques procure sureté, rigueur, précision, cohérence et liberté.

1. Les mathématiques comme sujet de débats philosophiques

Pourquoi un cours portant sur les mathématiques ? Le condensé du texte introductif en donne un aperçu. Cependant, cette question, pour un étudiant en classe de Philosophie, n’est pas banale. En effet, cette interrogation ouvre des espaces non seulement de réponses, mais aussi de plusieurs autres interrogations. On pourra ainsi rassembler des données instructives en rapport avec l’anthropologie, l’histoire et la philosophie des mathématiques, l’épistémologie, l’axiomatique, l’heuristique, le langage, la logique, et de façon plus technique, en rapport avec les structures mathématiques, par exemple, le calcul des probabilités qui intègrent le fortuit, l’aléatoire, le probable, l’incertain, le possible, le hasard. Ce sont là des notions, des catégories que manie le philosophe dans le cadre des analyses qui renvoient à une conscience de la contingence. On est donc amené à penser qu’à côté de la « raison certaine », il y a place pour une « raison aléatoire ». Aux différents registres de la vie, la science apporte son outil d’analyse. Les Mathématiques interviennent ainsi dans la vie et dans l’histoire des sociétés. On compte, on mesure, on dénombre, on applique chaque jour et à chaque instant les différentes opérations arithmétiques. Les mathématiques véhiculent une culture qui se traduit dans toutes les sociétés quand bien même le développement de cette culture n'a pas suivi le même rythme.

Entreprendre de parler de « mathématiques et sociétés » revient à s'ouvrir un immense espace de réflexion « théologico-anthropologico-métaphysico-scientifique ». Il ne s'agit donc pas d'une simple spéculation tendant à une superposition ou juxtaposition des disciplines différentes pour discuter de leurs lignes hiérarchiques, méthodologiques, heuristiques, didactiques, instrumentales, idéologiques, etc. Ces différents aspects, qui ne sont pas les seuls significatifs en la matière, permettent cependant de comprendre, les histoires cachées dans les théories à peine ébauchées, sans pour autant négliger les résultats acquis et communicables.

Mettre en perspective les mathématiques en classe de Philosophie revient donc à réfléchir aux formes des savoirs humains et aux mécanismes de leur production au moment où notre environnement culturel est bouleversé par les produits de l'intelligence humaine avec leur impact technique, technoscientifique et technologie. A leur base se trouvent les mathématiques. En effet, développer une attitude critique sur les bouleversements induits par l'exploitation des mathématiques devient, à n'en point douter, une tâche à la fois nécessaire et passionnante que ne peut dédaigner un philosophe.

A partir de ces quelques pistes de réflexion, il est difficile de dire que mathématiques et philosophie n'ont plus rien à se dire. Soutenir cette idée n'est rien d'autre qu'un indice révélateur de la méconnaissance d'une tradition millénaire à laquelle sont associés des « géomètres-philosophes », selon l'expression de Cournot, c'est-à-dire des personnalités intellectuelles consacrées par l'histoire en tant qu'elles ont conduit dans le même mouvement de pensée toutes les disciplines et particulièrement « mathématique et philosophie ». Thalès, Pythagore, Platon, Euclide, Archimède, Aristarque de Samos, Galilée, Descartes, Leibniz, Comte, Cournot, Cavaillès, Brunschvicg, Bourbaki sont des références de la manifestation de ces liens intimes qu'entretiennent philosophie et mathématiques.

Outre ce trait d'une vieille tradition, la philosophie continue de s'intéresser à la mathématique d'abord, parce qu'elle n'ignore pas cette tradition ; et puis, parce que la mathématique présente les caractères d'une discipline aux ressources inépuisables utiles pour l'esprit humain. Elle est une discipline issue, à l'instar de la philosophie, de l'esprit humain et qui, en retour, valorise cet esprit par la rigueur, la précision, la liberté, la cohérence logique.

Enfin, si la philosophie continue de s'intéresser aux mathématiques, c'est qu'elle sait que plus une science progresse, plus elle a besoin d'un champ réflexif, c'est-à-dire qu'elle a besoin d'une conscience pour demeurer authentique, notamment lorsque la philosophie nous conduit à interroger les racines profondes qui maintiennent les mathématiques dans les cultures qui les ont engendrées ou dans lesquelles s'opère leur compréhension. A la lumière de nombreux prismes philosophiques, on a cherché à évaluer la portée qualitative des mathématiques. Quelques termes techniques viennent ainsi enrichir les réflexions sur les mathématiques. On pense, entre autres notions, à l'immanentisme, la contemplation, l'instrumentalisation, l'axiomatisation, fécondité de l'esprit humain liée au pluralisme, la participation, le pan-mathématisme, le formalisme, l'intuitionnisme, le réalisme platonicien, le logicisme, etc. A travers ces quelques prismes philosophiques, on découvre à quel point la philosophie instruit l'arrière-plan des mathématiques.

Contrairement à la posture positiviste, qui pense la science comme un corps de théories ou de lois à prouver, et de ce fait procède à l'isolement doctrinal de la science, nous estimons qu'il n'y a pas de rationalisation à présentant comme étant sevrée d'un socle qui mêle des considérations théologico-anthropologico-métaphysico-scientifiques. Isoler la science revient inévitablement à l'installer hors des mouvements d'idées qui ont favorisé son émergence. Isoler la science comme le recommande la loi des trois états d'Auguste Comte est une manière de remplacer une pensée vivante et dynamique par une « pensée morte », c'est-à-dire une pensée qui ignore le frémissement de l'esprit et de la culture qui l'ont fait naître.

Bref, quand la philosophie s'intéresse aux mathématiques, cet intérêt peut s'interpréter de diverses manières comme nous l'avons indiqué. La philosophie s'enrichit toujours parce qu'elle fouine du côté de ce qui, *a priori*, semble s'en éloigner. La devise de Saint-Exupéry, à savoir, « qui diffère de moi m'enrichit » reste valable pour l'esprit philosophique.

Les mathématiques développent des axes de réflexion qui a priori relèvent de la pensée philosophique. **L'éthique ou la morale**, par exemple, se dégage de l'affirmation de Philolaûs, disciple de Pythagore, lorsque celui-ci soutient que « ***le nombre est incapable de recevoir le mensonge »*** ; **l'esthétique** intervient lorsque Poincaré, en parlant des mathématiques, fait allusion à « de formules élégantes » ; ou encore lorsqu'on érige les mathématiques en connaissance primordiale et incontournable pour l'éducation et la formation des « gardiens de la cité », comme l'indique le livre7 de *La République* de Platon. Bref, mettre en perspective « mathématiques et sociétés », c'est entreprendre d'étudier la perception qu'on a des mathématiques dans nos sociétés, perception qui intègre théologie, gnoséologie, anthropologie, mythes, épistémologie, histoire, philosophie. En d'autres termes, on pense comme les initiateurs de la mathématisation des sciences de la nature que le développement des sciences et des sociétés humaines s'opère par l'intelligence de type mathématique, la seule capable de décrypter les énigmes d'une nature formatée en termes mathématiques par l'Architecte divin.

2. Le double rapport des mathématiques dans la société

Il y a, au moins, deux manières de caractériser les rapports qui existent entre les sociétés et les mathématiques. Il y a le rapport d'instauration et le *rapport de développement.* Le rapport d'instauration fait appel à **l'anthropologie culturelle, à l'histoire** et nous permet de rappeler que les mathématiques occidentales, en dépit du développement extraordinaire auquel elles sont parvenues, ne sont pas les seules mathématiques existantes. D'où la relativisation des sources et de l'impact des mathématiques dans l'histoire des sociétés. Quant au rapport de développement, on peut se référer, entre autres, aux écrits de Léon Brunchvicg, d'Alexandre Koyré, etc. Ils soutiennent tous les deux, qu'il suffit de changer de philosophie pour qu'apparaissent des perspectives nouvelles porteuses d'un regard nouveau sur la connaissance humaine et singulièrement sur les mathématiques. A la philosophie contemplative succède la « philosophie pratique », comme le précise Descartes dans le *Discours de la Méthode*. Cette idée confine aux paradigmes, aux discontinuités et aux révolutions ou progrès constatées dans l'histoire des sciences dont parlent Michel Foucault, Gaston Bachelard et Thomas Kuhn. Ce mouvement de pensée est illustré par des notions d'« ***épistémè*** » ou de « ***paradigme*** ». On trouve ainsi dans *La philosophie du non* de Bachelard, des syntagmes illustratifs. Il parle de « logiques non aristotélicienne », « géométries non euclidiennes », « épistémologies non cartésiennes », œuvres de la raison polémique. Autrement dit, il faut envisager, dans le cadre d'une philosophie de la pluralité, de se mettre à l'écoute de la « **raison polémique »,** là où jusque-là, régnait ce que Bachelard appelle « ***la raison architectonique*** ».

Pour aboutir à la physique quantitative, il fallait rompre avec la physique qualitative d'Aristote fondée sur la perception sensible et résolument anti-mathématique dans la mesure où, selon Aristote, on ne peut concevoir ni qualité, ni mouvement dans les êtres abstraits que sont les figures et les nombres. Il existe ainsi une incapacité des mathématiques à expliquer la qualité et à rendre compte du mouvement. Il fallait rompre avec cette philosophie et instruire un nouveau système capable de rendre mathématisable le mouvement. Les discussions que Galilée engage, dans son ouvrage intitulé *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde,* avec les partisans d'Aristote, ne consistent pas à apporter les preuves à des esprits incapables d'en saisir la portée ; mais il conseille plutôt de commencer par éduquer ces esprits. En effet, Galilée veut promouvoir, en dépit des résistances, une interprétation mathématique de l'expérience, l'unique fondement ou base de la nouvelle science (philosophie naturelle). Pour Galilée, l'univers ne peut se comprendre que d'un point de vue mathématique.

L'avènement des géométries non euclidiennes (géométries portées par une philosophie non intuitive des mathématiques), celui du calcul différentiel (qui avec Newton instaure une théorie) constituent des exemples qui marquent à la fois une conception nouvelle de la pensée scientifique identifiée par certains épistémologues comme étant les indices d'un « nouvel esprit scientifique ». La connaissance scientifiquement innovante et crédible est celle qui est moulée dans le prisme des mathématiques et respecte toutes les exigences qui en découlent. Et Einstein d'écrire : « ***Le principe véritablement créateur se trouve dans les mathématiques*** » (A. Einstein, 1958. C*omment je vois le monde*, Paris, Flammarion, p. 152). Cette affirmation invite à évoquer quelques axes de réflexion.

3. Mathématiques et environnement socioculturel

L'intérêt logique, historique, axiologique, paradigmatique des mathématiques montrent à l'évidence que la philosophie et les mathématiques ont encore beaucoup de choses à se dire, surtout quand ajoute à cette discussion une dimension sociale et anthropologique des mathématiques. On a pu lire que *« l'homme qui vit dans un monde pauvre en mathématiques n'a pas la raison formée comme celui qui vit au contact de la rigueur et de l'élégance des modes de raisonnement mathématique* » (Maurice Loi, in Penser les mathématiques, Paris, Editions du Seuil, p. 8).

On ne peut pas nier l'impact de l'environnement dans l'apprentissage. Mais à tout réduire à l'environnement ne conduit-il pas à faire une place à des préjugés fondés sur le déterminisme social? L'existence des êtres porteurs de connaissance mathématique tels que le jeune esclave du *Menon* de Platon, l'acquisition des connaissances mathématiques par l'illumination chez Descartes, les enfants des cours communes et dont les parents ne sont pas eux-mêmes des mathématiciens et qui sont pourtant devenus de grands mathématiciens (Gauss, Saliou Touré, etc.), sont des exemples qui inclinent à nuancer nos propos quant à l'influence du milieu voire du déterminisme social. On peut puiser dans l'environnement socioculturel des exemples didactiques comme c'est le cas des jeux de cauris. Cet exemple approfondi conduit à la révélation d'une structure mathématique qu'est **le calcul des probabilités**. Outre son aspect pédagogique et **heuristique**, le calcul des probabilités induisent, dans l'esprit du philosophe, un traitement particulier de quelques notions qui donnent lieu non seulement à des formules techniques mais aussi et surtout ouvrent un nouveau pan de réflexion marqué par la conscience de la contingence (fortuit, du probable, de l'incertain, du hasard, du possible). Notons que pour les mathématiciens, seule est digne d'un intérêt, l'approche heuristique, en ce sens qu'elle tient dans une présentation courante et unanimement adoptée (chaque fois qu'on veut se faire une idée rapide concernant un point précis d'un problème mathématique).

4. **Les pensées mathématiques ne font défaut à aucune société.**

Mettre en rapport les mathématiques et l'environnement socioculturel conduit à faire allusion non seulement l'impact des mathématiques, mais aussi à évoquer la dimension historique, anthropologique et culturel des mathématiques, du point de vue de leur instauration et de leur développement. L'histoire des sciences mathématiques montre que toutes les civilisations disposent de connaissances mathématiques quand on considère les systèmes d'énumération, certaines énigmes, certains documents historiques. Mais il importe d'indiquer que les mathématiques, en tant que discipline structurée et consignées dans des ouvrages, n'ont pas toujours et partout bénéficié ni de la même réception, du même développement, ni du même degré d'utilisation ou d'exploitation.

La réception active des mathématiques comme facteur déterminant, du point de vue du développement, diffère selon les époques, les contextes culturels, les usages et les sociétés. L'exemple du 18^{e} siècle, et principalement la période de l'Encyclopédie, Emile Bréhier rapporte dans son ouvrage intitulé ***Histoire de la philosophie II/ XVIIe – XVIIIe siècles***, Paris, Quadrige/PUF, 1981, pp. 385-387), ce qui suit : « Nous touchons au moment d'une grande révolution dans les sciences, écrit Didérot dans l'***Interprétation de la nature***. Au penchant que les esprits me paraissent avoir à la morale, aux belles-lettres, à l'histoire de la nature et à la physique expérimentale, j'oserais presque assurer que, avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas plus de trois géomètres en Europe ». Ce morceau de texte montre qu'il a pu se produire, à cette époque, un véritable mouvement de « démathématisation » de la philosophie de la nature. On tente de tourner le dos à l'idéal cartésien, selon lequel toutes les difficultés, en physique, doivent être rendues « quasi semblables à celles des mathématiques ». Didérot a pu affirmer qu'on devrait écrire un ***Traité de l'aberration des mesures***. A travers cet ouvrage on voit la tentative de minimiser l'intelligence du nombre, ce qu'on traduit par la tendance prononcée pour la « quantité ». Il est arrivé une autre période, selon Cournot, où on a procédé à la « chasse aux mathématiciens » et assimilés. On a pu parler ainsi de la mésaventure des mathématiciens assimilés à des magiciens et des astrologues sur la base de motivations variées et variables.

Mais peut-on se passer des mathématiques quand on imagine, comme Pythagore, que « tout est nombre » ; comme Platon, que le nombre participe de l'idée ; ou encore comme Philolaüs qui assure que « ***le nombre ne ment pas*** ». On retiendra qu'à partir du 16^{e} siècle, la redécouverte de la philosophie mathématique de Platon remet à l'ordre du jour les mathématiques dans leur versant instrumentaliste, loin de tout élan contemplatif. Par le biais des mathématiques, il est possible de mieux comprendre la nature. Galilée, affirme que le livre de la nature est écrit en langage mathématique ». Descartes réduit les substances en « étendue » et en « mouvement », deux notions mathématisables parce qu'elles sont d'essence mathématique. Croyances, thèses philosophiques sont assumées comme des orientations qui structurent et alimentent l'arrière-plan des mathématiques perçues désormais non seulement comme un langage, un instrument, mais aussi comme un mode de penser. En effet, les mathématiques jouissent d'un préjugé favorable en tant que modèle de pensée rationnelle. Il se développe dès lors des mouvements de recherche tendant à révéler et valoriser une matière à partager comme un patrimoine universel. Cependant, les appellations des recherches ainsi entreprises ne manquent pas de véhiculer des préjugés liés au niveau de développement atteint par la conscience et la pratique des mathématiques.

5. « **Ethnomathématique », « Sociomathématique », « mathématique congélée »**

Les points de discussion concernant les rapports de Math-Sociétés sont, comme nous l'indiquions, tellement nombreux qu'il est difficile d'en convoquer tous les aspects et de les discuter comme tels. Les désignations que nous utilisons, en dépit de leur caractère péjoratif ou même dévalorisant, sont une preuve toute culture dispose d'un patrimoine culturel duquel on peut ressortir un « condensé mathématique ». Ici, nous évoquons cela en mettant en relief comment il est possible de servir de ce condensé pour enrichir le processus de « mathématisation » qui s'opère à partir des concepts utilisés dans la vie courante et qui ont seulement besoin de « soins méthodologiques» (définition rigoureuse et systématique) afin de nous révéler à nous-mêmes que chaque jour, nous faisons des mathématiques sans le savoir. Tout dans notre environnement « respire » les mathématiques. C'est la thèse de l'immanentisme pythagoricien sans le mysticisme.

A la manière des peuples Tchokyé (Mozambique) qui confectionnent des nattes, chapeaux, des sacs à main, qui construisent de cases, fabriquent jeux d'enfants, le tout fondés sur des figures géométriques, s'attèlent ainsi à des activités qui sont des « pratiques mathématiques ». On peut consulter les ouvrages, par exemple, de Palus Gerdes et Gildo Bulafo (Mozambique), Salimata Doumbia et Pils (Côte d'Ivoire).

- Palus Gerdes et Gildo Bulafo (1994), *Sipatsi : technologie, art et géométrie à Inhambane*, Maputo, Instituto Superior Pedagogico.
- Salimata Dombia et Pils, jeux de cauris.
- N'GUESSAN (Depry Antoine), « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : problématique de la vocation mathématique», in *Ethiopiques*, Revue négro-africaine de littérature et de philosophie, N° 68, 2002, pp. 141-159
- N'GUESSAN (Depry Antoine), 2000, « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : regard épistémologique », in Cahiers du Centre d'études et de recherche en lettres, sciences humaines et sociales (CERLESHS), Ouagadougou, N° 17, 2000, 175-195.

Dans les jeux de cauris, on observera que ces coquillages utilisés dans une vaste aire culturelle en afrique, véhiculent des statuts qui lui confèrent à la fois une dimension ludique, logique, esthétique, divinatoire, et scientifique, notamment à travers la structure mathématique du calcul des probabilités.

Au fond, les notions de « mathématiques congélées », « sociomathématique » ou d'« ethnomathématique » qui ont fait l'objet de recherche dans des centre créés à cet effet, ont par-delà les intentions et les préjugés qui les entourent, un aspect à méditer et à approfondir dans le cadre d'une didactique et d'une pédagogie adaptées à l'environnement socioculturel des apprenants africains. C'est une tâche revient en propre à la philosophie et plus précisément, à l'épistémologie. Car il s'agit d'y démêler un ensemble de problèmes liés, par exemple, à la loi des trois états, la démarcation, etc.

Le processus de mathématisation des objets de l'environnement socioculturel africain (awalé, jeux de cauris, etc.) initié dans les centres de recherche a un caractère fondamentalement mathématiques dans la mesure où il est fait par les mathématiciens qui n'y recherchent prioritairement que **la rigueur des termes et la cohérence du langage mathématique**. L'exemple du jeu de cauris est à cet effet assez illustratif. Parmi les nombreuses notions mises en œuvre, on peut étudier de plus près la notion de **collection**, qui soumise à la rigueur mathématique, fait s'effacer des considérations peu pertinentes au profit, par exemple, des notions mathématiquement significatives comme c'est le cas d'un « **ensemble** » et de la **« relation** ».

6. Quelques exemples de définitions liés à un ensemble

En effet, il se produit pour les définitions d'une théorie déductive, le même phénomène que pour les propositions. Toute définition ne peut être donnée qu'à partir des termes déjà définis. Les premiers termes ne peuvent donc l'être. Le terme « **ensemble** » ne peut donc pas plus être défini que ne l'était celui de « point » en géométrie. Un tel terme est qualifié de primitif. On ne le définira pas, mais on indiquera à quelles règles est soumis son usage. D'autre part, on indiquera quelles situations concrètes, la notion que représente ce terme a été abstraite et comment elle peut être utilisée pour une schématisation valable de ces situations.

La notion d'ensemble est la mathématisation de la notion concrète de collection. On utilise dans le langage courant des termes désignant des collections d'objets (le mobilier d'une maison, la batterie de cuisine, le service de vaisselle), des groupe d'hommes (le régiment, la tribu, la classe sociale) et l'on rencontre aussi des collections dont les objets ne sont pas matériels (les péchés capitaux, les vertus théologales, les nombres entiers, etc.). Dans tous les cas, on distingue les éléments (la table, la casserole, l'homme de troupe, le bourgeois, la paresse, la foi, le nombre 7, etc.) de la collection que l'on considère comme **un tout**. Que demande-t-on à une collection pour la qualifier d'ensemble ?

D'abord, que chacun de ses éléments soit invariable et qu'il soit parfaitement discernable des autres, puis qu'il n'y ait aucune ambigüité sur le fait qu'un élément donné appartiennent à un ensemble donné. La question « a est-il élément de l'ensemble A » ne peut avoir pour réponse que « oui » ou « non ». **D'où** les trois (03) remarques à faire :

La première remarque tient dans le fait qu'il existe dans la vie courante des collections. Cependant, on identifiera facilement, à partir d'une définition canonique, les groupements ou collections qui ne respectent pas les conditions définies d'un ensemble.

En effet, il est important de faire remarquer que dans la vie courante, il existe des collections qui ne satisfont pas rigoureusement aux conditions que nous venons d'indiquer. Il s'agit par exemple des classes sociales. On créera ainsi des règles administratives qui ont pour but de créer des collections nettement définies, des ensembles (par exemple, les corps de fonctionnaires, les unités militaires, etc.). Il est commode d'utiliser une notation symbolique pour exprimer la proposition « a est élément de A ». On l'écrit de la manière suivante :

$a \in A$

La notion $a \notin A$ signifie « a n'est pas élément de A ». Quels que soit l'élément a et l'ensemble A, des deux propositions

$a \in A$ $a \notin A$

il y en a donc une seule qui est vraie, l'autre étant alors fausse.

La seconde remarque tient dans le fait que des collections de la vie courante, si vastes soient-elles, sont des collections finies, c'est-à-dire des collections dont « l'effectif » est caractérisé par un nombre entier naturel, tandis que le mathématicien travaille sur des ensembles infinis, tels que l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des fractions, l'ensemble des droites d'un plan, etc.

La troisième est liée à l'existence d'un ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle alors un ensemble vide et on note $\emptyset$. Pour le mathématicien, quel que soit l'élément a, on a toujours $a \in \emptyset$.

On parlera ainsi d'une maison vide pour signifier que l'ensemble de son mobilier *ou l'ensemble de ses occupants est vide*.

Hormis les restrictions signalées, et la condition qu'un même être ne puisse à la fois être un ensemble et un élément de cet ensemble ; autrement dit, toute relation de type $a \in$ a étant exclue, une **liberté complète** est laissée à l'esprit pour concevoir des ensembles.

Au fond, les quelques règles d'emploi du mot « ensemble qui viennent d'être rappelées sont nécessaires pour éviter toutes les ambigüités que se permet le langage courant. Un raisonnement qui comporte des ambigüités aboutit à une contradiction : le comique et l'absurde sont souvent la face concrète et la face abstraite d'une même contradiction. La contradiction est le totem des mathématiques.

En effet, ce que nous avons dit de l'ensemble peut être repris pour la notion de relation.

Qu'est-ce qu'une relation ?

Pour mieux faire saisir cette notion, il est utile de procéder au passage d'une situation concrète à une définition mathématique. Nous parlons couramment, par exemple, des

- relations de parenté (père, mère, frère, sœur, cousin, neveu, etc.)
- relations d'affaires (client, fournisseur, bailleur de fonds, mécène, etc.)
- relations de voisinage, relations commerciales, etc.

Y a-t-il une idée commune qui justifie l'usage du même mot dans les diverses situations et qui peut être soumis à une réduction mathématique ? En effet, on affirme qu'il y a relation lorsqu'on constate que parmi tous les couples ainsi formés, certains peuvent se rencontrer, d'autres, au contraire, sont à exclure. Les relations de parenté, par exemple, conduisent à la même idée : la relation **A** est père de **B**, permet de distinguer parmi les couples d'êtres humains, ceux pour lesquels **A** est père de **B**, de ceux pour lesquels c'est inexact. Il existe ainsi des couples qui vérifient la relation et des couples qui ne la vérifient pas. En précisant ces remarques pour obtenir une situation d'où toute ambigüité sera exclue, nous dégageons, de proche en proche, la relation mathématique qui obéit à des règles ou exigences.

Si nous disposions suffisamment de temps matériel, on aurait pu aller plus loin dans l'étude des règles qui permettent d'employer les types de relations admis par les mathématiques et qui, de ce fait, peuvent être appliqués aux ensembles et apprécier les conséquences épistémologique, historique et heuristique. Ce qu'il convient de retenir, c'est l'édiction des règles strictes qui permettent d'éviter les confusions. Au fond, la rigueur font des mathématiques **un instrument, un langage, un mode de pensée et un espace de liberté.** A travers les exemples utilisés pour matérialiser la mise en œuvre des notions de **structures mathématiques**, nous voulions insister, un tant soit peu, sur deux choses, au moins, à savoir que

i) si la société engendre les mathématiques, celles-ci, en retour, inculque à la société savante la nécessité d'un ordre de rigueur, l'intérêt de la précision, et la liberté à partir de la dialectique des axiomatiques. Bref, les mathématiques sont un mode de penser sûr de son langage et qui fait honneur à l'esprit humain parce qu'elles le portent vers la « lumière du jour », vers la vérité. D'où la nécessité pour Platon de recourir aux mathématiques pour former les citoyens appelés à diriger et gérer les affaires de la cité (Platon, *La République*, livre 7).

ii) Les mathématiques nous rendent contemporains et solidaires, d'abord, par l'usage multiforme qu'on en fait et, ensuite, parce qu'elles se donnent à chacun de nous comme instrument, langage, mode de pensée favorisant le pluralisme.

7. Le calcul et la numération dans les civilisations humaines

La tradition du nombre, dans sa conception axiomatique est de récente création. Les hommes ont utilisé la quantité pendant des millénaires avant d'accéder à l'idée de nombre non seulement à mieux l'apprendre, mais aussi à la conserver. L'idée de nombre procède d'un long travail d'abstraction de la pensée. Auparavant, pour faire usage des quantités, les hommes disposaient de supports privilégiés (bois, os, etc.). Pour mémoriser, par exemple, combien il y avait de moutons, on faisait des marques (souvent des entailles) sur les supports disponibles. Ainsi, un certain nombre d'os de près de 30 000 ans ont été retrouvés. Pour assurer la fonction de mémorisation de la quantité, outre l'os, le bois, les cailloux, etc., l'homme a eu recours aux parties de son corps (doigts, orteils, bras, jambes, etc.). Toutes les civilisations ont donc développé des mécanismes ou des dispositifs matériels de numérotation (calculi, table à compter, abaques, cordelettes à nœuds (cinq siècles avant Jésus en Perse).

C'est en Mésopotamie et dans certaines zones du Moyen Orient qu'apparaissent les calculi (« calculus », c'est-à-dire des « cailloux en latin) qu'on disposait par tas. Les tas comportaient « un », « un, un », « un, un, un ». Pour éviter les difficultés liées au nombre de cailloux, les anciens eurent l'idée de faire représenter les tas par des cailloux de nature différente (couleur, forme, etc.). On retrouve chez les Sumériens vivant au sud de la Mésopotamie, au Proche-Orient) des objets fabriqués (pierres d'argile, par exemple) qui sont des calculi (4^{e} millénaire avant J-C). La grande faiblesse de ces dispositifs matériels était qu'ils ne permettaient de garder longtemps des traces du passé. C'est alors qu'apparaît la numération écrite vers 33000 ans avant Jésus-Christ, à Sumer. Les chiffres sont représentés par des symboles, par exemple, la « fleur de lotus » en Egypte. Les règles de construction varient, mais déjà, transparaissait l'idée **d'une rigueur** qu'on peut décrire ainsi :

- Il fallait permettre une lecture sans ambigüité, une même écriture ne devant pas représenter deux nombres différents
- Il fallait représenter uniquement un maximum de nombre avec un minimum de symboles.

On en vient ainsi à l'idée d'une base. Au lieu de compter uniquement par des unités, on compte par « paquets ». On aura ainsi les bases

- **Décimale : 10** ; C'est la base la plus courante fondée sur l'intuition des dix doigts de la main. Des peuples bergers d'Afrique de l'Ouest avaient une manière de dénombrer leurs bêtes dans un troupeau. On fait défiler les bêtes les unes après les autres. Au passage de la première bête, on enfile un coquillage à une **lanière blanche**, un autre coquillage au passage de la deuxième bête et ainsi de suite jusqu'au passage de la dixième bête. A ce dixième animal, on défait le collier et on enfile un coquillage à une **lanière bleue** associée à l'idée **d'une dizaine**. Puis on recommence à enfiler des coquillages à une lanière blanche jusqu'au passage du vingtième animal ; puis on enfile un autre coquillage à une lanière bleue. Si celle-ci contenait à son tour dix coquillages, soit cent bêtes, on défait le collier des dizaines et on enfile un coquillage à une lanière rouge, réservée cette fois-ci aux centaines. Et on procède ainsi jusqu'à dénombrement total des bêtes. Au dénombrement de 258 bêtes, par exemple, on constate que huit coquillages se trouvent enfilés à la lanière blanche, cinq à la lanière bleue et deux à la lanière rouge. Il y a là un raisonnement que les mathématiciens pourraient mieux éclairer sur la base d'une structure mathématique. Mais, force est de constater que nous comptons aujourd'hui encore comme eux, mais avec des symboles différents.
  L'idée de cette manière de compter réside dans le principe de groupement et du rythme des symboles de la série régulière) par dizaines (ou « paquets de dix » ; par centaines (ou « paquets de dix dizaines » ; par millier (ou « paquets de dix cents »), etc. A travers cette technique de comptage, on remarque que chaque coquillage de :
    - ✓ la lanière blanche compte pour une unité
    - ✓ la lanière bleue compte pour dix
    - ✓ la lanière rouge constitue un groupement de cent unités (ou des dizaines)

Tel est le principe de la « numération à base dix ». Quand ce principe de coquillages et de lanières est remplacé par des mots et des signes graphiques, on obtient des numérations orales ou écrites de base dix. De nos jours, la numération écrite dont on se sert utilise des symboles graphiques que nous appelons des **chiffres arabes : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0**

- base sexagésimale : 60 (Sumériens)
- base vicésimale : 20 (Maya)
- base duodécimale : 12 (Maya)
- base quinaire : 5 (maya)
- base binaire : 2
- etc.

Qu'est-ce donc qu'une base de numération ? En effet, pour symboliser les nombres, on s'est servi de deux principes majeurs : l'un, appelé **cardinal** (adoption d'un « symbole-étalon » représentant l'unité et qui est à répéter autant de fois qu'elle est contenue d'unités ; l'autre, appelé **ordinal**, consiste en une succession de symboles n'ayant aucun rapport les uns avec les autres. On dira, dans le premier cas (**nombre cardinal**): un doigt, deux doigts, trois doigts, quatre doigts, cinq doigts, etc. c'est-à-dire par alignement, juxtaposition, ou superposition du nombre un. Dans le second cas (**nombre ordinal**), on parlera de premier doigt, deuxième doigt, troisième doigt, quatrième doigt, cinquième doigt, etc. qu'on peut représenter par des mots, objets, gestes, signes ou même des noms de personnes (par exemple, « N'guessan » chez les baoulé) tous différents les uns les autres.

C'est à partir de ces deux principes fondamentaux que les anciens ont appris à concevoir des collections de plus en plus étendues. Avec ces collections, il est difficile de se représenter des nombres de plus en plus grands et a *fortiori* de recourir à des cailloux, bâtonnets, encoches ou nœuds de cordelettes, ou encore des doigts qui sont, du reste, des objets non extensibles à volonté. Ce sont ces collections que nous appelons un « **ensemble** » sur lesquelles on établit, à partir des règles, des relations. Nous y reviendrons un peu plus loin.

8. Les cauris dans la société et la structure du calcul de probabilité

Comment les cauris, par-delà leurs dimensions ludique, académique, esthétique et divinatoire qui leurs sont conférées dans l'environnement socioculturel africain, offrent-ils une autre dimension purement scientifique à travers une structure mathématique, à savoir le calcul des probabilités ?

9.

Si nous admettons, un tant soit peu, que l'univers est conçu et réalisé par l'architecte divin sur un mode d'inscription mathématique, l'application du principe Leibnizien de la raison suffisante nous fait obligation d'admettre aussi que dans « le meilleur des mondes possibles », qu'il n'y a pas de raison qu'une partie de ce monde soit conçue autrement que sur le même mode mathématique. L'Afrique, le continent qui fait partie de ce monde, ne peut pas ne pas obéit mêmes exigences et aux mêmes critères mathématiques. Quand même nous imaginons que, de fait, aucune contrainte ne pèse sur dieu dans ses délibérations divines, il serait incompréhensible, du moins sur un plan purement logique, que l'idée de perfection ou de bonté consubstantiellement attachée à celle Dieu n'engendrât point les mêmes implications sur la totalité de ses œuvres. Cette impossibilité de l'arbitraire conduit à la conclusion que la nature en Afrique reste conforme aux exigences et aux prescriptions mathématiques telles qu'on les sous-entend dans l'arrière-plan des conceptions théologico-philosophiques des mathématiques. L'hypothèse d'un dieu mathématicien signifie donc, pour faire bref, qu'il y a identité et continuité dans l'idée de nature. Leibniz affirmait que « la nature ne fait pas de saut ». Ces présuppositions qui, au XVIIe siècle, ont favorisé la mathématisation ou la géométrisation de la nature sont implicitement les paramètres modulant l'arrière-plan de toute recherche mathématique. Etroitement liée à la précédente supposition, celle de l'homme créé à l'image du Créateur, fait de l'homme, de tout homme, un être naturellement mathématicien. Cette croyance, convient-il de le souligner, a eu des formulations variées et variables. Dans l'antiquité, où quelques philosophes ont développé une mystique des nombre, on est convaincu, comme Pythagore, que « tout est nombre ». Ce trait de pensée permet non seulement de croire, dans bien de civilisations, que le nombre a un nombre, mieux, procure un pouvoir qui transcende le cadre même des mathématiques. En s'appuyant, d'une part sur la théorie des idées mathématiques que Platon développe dans le *Menon* (réminiscence) et dans *La république (livre 7, la géométrie élève l'âme vers la lumière du jour) ;* et d'autre part, sur le statut de l'ingénieur au XVIIe siècle, on est porté à croire que l'homme porte déjà effectivement en lui les « semences » de vérités mathématiques. Descartes les caractérise comme étant « *les premières semences de vérités déposées par la nature dans l'esprit humain, mais que nous étouffons en nous en lisant et en écoutant chaque tant d'erreurs de toutes sortes* » (Descartes , *Règles pour la direction de l'esprit*, IV Œuvres et Lettres, La Pléiade, Gallimard, Paris, p.49). Si le type de vérité fondé sur le nombre tient une place dans toutes nos délibérations métaphysico-scientifiques c'est parce que, comme le dit Philolaos, « le nombre, par nature est incapable de recevoir le mensonge » (Brunschvicg (l.), *Les étapes de la philosophie mathématique*, A. Blanchard, Paris, 1981, p.40). L'avènement de l'harmonie dans le monde est la victoire du nombre sur l'infini, sur l'irrationnel, etc. Le nombre qui ne ment pas devient ainsi le principe de la vérité. La réminiscence, l'intuition et la démonstration sont les chemins par lesquels nous parvenons à la pleine lumière des vérités mathématiques qui sont enfouies en nous et qui n'attendent qu'une sorte de « chiquenaude » pour devenir manifeste. Le jeune esclave inculte dans le *Ménon* (*Protagoras, Euthydème*, *Gorgis, Ménexène, Ménon, Cratyle*, Paris, Flammarion, pp. 344-353, traduction et notes d'E. Chambry) de Platon nous fournit une excellente illustration de la réminiscence. Dans cet ouvrage de Platon, la chiquenaude se réalise par la médiation de Socrate. Les conditions étant réunies (méthode, Socrate, problème) il devient facile pour le jeune esclave de réussir, de proche en proche, l'exécution du problème posé, à savoir la démonstration d'une figure géométrique dans le sable. Dans le *Discours de métaphysique*, lorsque Leibniz veut établir que nous avons en nous virtuellement toutes les idées, il se réfère judicieusement au *Ménon* (Leibniz aurait pu se référer au texte du Phédon (74 a-75d), in Œuvres complètes, t. I, Paris, La Pléiade, Gallimard, 1963, pp.789-792). Il y a également un autre r approchement qu'on donc peut établir entre le *Ménon* et la conviction du mathématicien ivoirien Saliou Touré, lorsque celui-ci écrit notamment, qu' « *on peut trouver des personnes illettrées capables de maîtriser l'application des concepts mathématiques dans l'exercice de leurs activités quotidiennes. Il existe donc chez nous des personnes illettrées, poursuit-il, un esprit mathématique leur permettant, même si elles ignorent les structures mathématiques de ces concepts, de dominer le sujet, de l'analyser logiquement d'une manière prospective, sans s'embarrasser de tous les facteurs qui ont contribués à la définition de ces structures* » (Saliou Touré, Préface de *Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain*, tome 1, IRMA, Abidjan, juin1984, p.1)

Dans les limites de l'analogie, il n'est pas inutile d'affirmer que les dessins *sona* des traditions *Tchokwé*, les tissages de chapeaux ou de nattes dans les sociétés africaines, les contes, les activités ludiques, révèlent incontestablement la maîtrise et l'exécution de figures géométriques par des paysans « illettrés ». Par-delà la lecture métamathématique de quelques activités et des réalisations connexes ou collatérales tels que les dessins et les tissages, les contes, les comptines, les activités ludiques ou divinatoires, la nature même des exemples choisis ainsi choisis révèle, en soi, toute une symbolique qui donne à penser qu'il y a effectivement plus que les mathématiques dans les mathématiques. Les problèmes du fondement, la nature des êtres mathématiques appartiennent à l'arrière-plan métaphysique tel que nous l'insinuions plus haut. A la manière d'un échafaudage, il est évident que cet arrière- plan disparaît ou s'efface dès lors que l'édifice de la connaissance est achevé. Très peu de mathématiciens africains se préoccupent de cette dimension du savoir scientifique que la quête d'un schématisme mathématique ne peut éluder. Cette à l'illustration de cette autre dimension de la recherche susceptible de conférer à l'entreprise ethnomathématique toute sa signification épistémologique que nous examinons le cas des jeux de cauris. Hormis ce qui précède, la réponse à la question se trouve dans les textes de Doumbia Salimata et N'Guessan Depry Antoine cités dans les éléments bibliographiques. Pour construire la structure du calcul des probabilités, il a d'abord fallu que le mathématicien dégage un support assez neutre, assez incolore pour être en mesure de représenter dans les raisonnements n'importe quel objet ayant les caractéristiques d'un jeu de hasard. Aussi, en est-il de même pour la contribution décisive de Cantor qui, dans les années 1870-1880, créa la théorie des ensembles qui est à la base de l'édifice des mathématiques, aujourd'hui.

Bibliographie sommaire

- Bréhier (Emile), ***Histoire de la philosophie II/ XVIIe – XVIIIe siècles***, Paris, Quadrige/PUF, 1981
- Brunchvicg (Léon), *Les Etapes de la philosophie mathématique*, Paris, Albert Blanchard, 1981
- Descartes (R.), *Règles pour la direction de l'esprit*, IV Œuvres et Lettres, La Pléiade, Paris, Gallimard, p.49
- DOUMBIA (Salimata), « L'expérience en Côte d'Ivoire de l'étude des jeux traditionnels africains et de leur mathématisation », in *Actes de la première université d'été européenne, Thème : « Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique »,* Montpellier 19-23 Juillet 1993, Montpellier, Edition et diffusion : IREM de Montpellier, Université de Montpellier II, pp. 549-555
- N'GUESSAN (Depry Antoine), 2002, « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : problématique de la vocation mathématique», in *Ethiopiques*, Revue négro-africaine de littérature et de philosophie,Dakar, N° 68, 2002, pp. 141-159
- N'GUESSAN (Depry Antoine), « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : regard épistémologique », in Cahiers du Centre d'études et de recherche en lettres, sciences humaines et sociales (CERLESHS), N° 17, 2000, 175-195
- Platon, *Ménon* (*Protagoras, Euthydème, Gorgis, Ménexène, Ménon, Cratyle*, Paris, Flammarion, pp. 344-353 (traduction et notes de E. Chambry)
- Saliou Touré, Préface de *Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain*, tome 1, Abidjan, IRMA, juin1984, p.1