

EPISTEMOLOGIE LICENCE 1 / 2019-2020

UE EPS 5502: EPISTEMOLOGIE DES SCIENCES FORMELLES

Ecue EPS5502.1: Épistémologie des sciences mathématiques

Cours magistral : La philosophie dans les mathématiques

Résumé : Pour comprendre pourquoi la philosophie s'intéresse aux sciences, aux sciences formelles et singulièrement aux mathématiques, nous retenons trois raisons principales. (i) **L'histoire et la philosophie des sciences** : elle présente les grands philosophes comme des autorités intellectuelles qui ont mêlé, dans leur réflexion, les différents domaines du savoir humain. (ii) Les **considérations théologico-métaphysico-scientifiques** : elles insistent sur l'hypothèse d'un Dieu mathématicien. Pour espérer décrire, expliquer et comprendre correctement, par le biais des sciences, l'œuvre de l'architecte divin, il importe de s'y appliquer en recourant au mode et au langage par lesquels l'univers vint à l'existence. Kepler avoue avoir découvert, par le biais des mathématiques, le plan de Dieu. (iii) **L'axiomatique** : elle met en relief, la liberté, la cohérence, la rigueur, la précision, bref, un ensemble de notions qui font des mathématiques un mode de pensée pourvoyeuse d'intelligibilité.

Objectif général

Introduire l'épistémologie des mathématiques par des approches historiques, définitionnelles, conceptuelles et métaphysiques.

Objectifs spécifiques

- Identification des sciences à travers les classifications des sciences
- Marquer l'étendue du champ de l'épistémologie
- Identifier quelques systèmes philosophiques dominants dans les sciences mathématiques

TRAVAUX DIRIGES : Exposés sur la base des textes choisis

Articulation du cours magistral

1. APERCU SUR L'ETENDUE DU CHAMP EPISTEMOLOGIQUE
2. LA PLACE DES MATHÉMATIQUE
3. LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

BIBLIOGRAPHIE

Patrick Peccatte, *La consistance rationnelle : critique de la raison démarcative*, Paris, Aubin Editeur, 1996

A-A. Cournot, *Essai sur le fondement de nos connaissances et sur le caractère de la critique philosophique*, Paris, Vrin, pp 401-415)

Jürgen Habermas, *La Technique et la science comme idéologie*, (1968, Traduction française et introduction de J. R. Ladmiral, Paris, Gallimard, 1973

Robert Blanché. 1968. *Introduction à la logique contemporaine*, Paris, A. Colin, chapitre 1^{er}, p. 31-33

Jean Piaget. 1970. *Traité de logique*. Paris A. Colin. p. 18-21

Bertrand Russell. 1970. *Introduction à la philosophie mathématique*. Paris. Payot. p. 231-232.

Auguste Comte, *Cours de philosophie positive*, 2^e leçon, (Paris, Editions Garnier Le Verrier, pp. 138-161).

Galilée Galiéo, *L'Essayeur*

Descartes, René, *Discours de la méthode*. 1637)

Descartes René, *Les règles pour la direction de l'esprit*, 2^e partie

Albert Einstein et Léopold Infeld, 1981, *L'évolution des idées en physique*, traduit de l'anglais par Maurice Solovine, Paris, Petite Bibliothèque Payot, p. 23

Maurice Loi, 1982, *Penser les mathématiques*, Paris, Editions du Seuil, Avant-propos, p. 12

Introduction

Pourquoi s'intéresser aux sciences quand on a choisi de faire de la philosophie ? Il y a au moins deux raisons que nous pouvons évoquer : la première, c'est que la philosophie ne s'épuise pas dans la philosophie spéculative. Outre les questions se rapportant à l'être, au monde et à Dieu, qui relèvent de la métaphysique et de l'ontologie, la philosophie se préoccupe également, concernant la seconde raison, des questions liées aux produits de l'esprit et de l'agir humains. Il s'agit de l'ensemble des champs de la rationalité humaine. « Réfléchir aux formes du savoir et au mécanisme de sa production au moment où l'on assiste à des bouleversements de plus en plus fréquents est une tâche nécessaire, et passionnante » (Maurice Loi, 1982, p. 7) Ces champs ou ordres de rationalité intéressent la philosophie soit en termes de théories de la connaissance, soit en termes de critique des méthodologies, des sociologies, des anthropologies des sciences. C'est dans la différence qu'on évalue mieux l'intérêt de la philosophie pour tout ce qui apparemment, semble s'éloigner de la philosophie. Dans cet ordre de recherche, on parle d'**épistémologie** ou ce qui revient au même, de la **philosophie des sciences**. Mais qu'entendons-nous par le vocable « science » ? Au singulier et avec une majuscule, le terme « Science » s'appréhende comme une réalité conceptuelle qui subsume une réalité plurielle susceptible de remplir les **différentes classifications des sciences** (Descartes, ampère, Comte, etc.).

I/Considérations générales concernant l'épistémologie

Il s'agit d'une introduction générale concernant l'épistémologie, après avoir indiqué ce qu'est la science, les classifications et les méthodes qui les fondent comme une activité théorique.

1. Qu'est-ce qu'une science ?

Cette interrogation, qui appelle une définition de type essentialiste, semble occulter les autres dimensions du fait et de la pratique scientifique. Car la définition de la science peut être formulée de plusieurs manières en tenant compte des facteurs et angles d'intérêt. Par exemple, on peut considérer les dimensions suivantes : fonctionnelle, opératoire, conceptuelle, historique, pragmatique, instrumentale, axiomatique, etc. D'ailleurs, nos lectures des encyclopédies et des dictionnaires spécialisés, ainsi que les textes des savants

et de philosophes montrent bien les différentes définitions qu'on donne de la science, selon les différents angles et centres d'intérêt. Tous les champs ou domaines de rationalité qui sont constitués sont qualifiés de « scientifiques » quand on considère leur caractère et leur prétention à l'objectivité. Pour éviter la confusion, on utilise souvent des termes distinctifs. Par exemple, on parle des « sciences dures », « sciences exactes », « sciences pures », des « sciences fondamentales », « sciences de la nature », « sciences formelles », « sciences cognitives », « sciences de l'esprit », « sciences biologiques », « sciences de l'homme et de la société », « sciences des structures », « sciences appliquées », « sciences expérimentales », etc.

Pour ce qui concerne notre exposé, nous allons retenir qu'une science est, avant tout, un savoir qui jouit d'un protocole d'institution, de réalisation, de diffusion et d'impact. Ce type de savoir s'effectue dans un domaine précis de discursivité et de rationalité. Il se présente sous une forme systématisée de la pensée objective.

A partir de ce qui précède, on dira qu'il existe une multitude de domaines de connaissance qui méritent le titre de « science », ou le statut de « connaissance scientifique ». Un mathématicien, un physicien, un astronaute, un philosophe, un psychologue, un juriste, un économiste, un théologien, un biologiste, un linguiste, un criminologue, un toxicologue, produisent ainsi, chacun à son échelle et dans son domaine, un travail qualifié de « recherche scientifique », c'est-à-dire un travail objectif.

Le substantif « Science », qu'on utilise parfois imprudemment au singulier, a un caractère polysémique, parce qu'il subsume, en fait, une réalité plurielle. La reconnaissance de cette pluralité de domaines dits « scientifiques » conduit-elle à penser que toute pensée objective constitue nécessairement une pensée scientifique ? On trouvera ainsi, selon l'angle de considération propre à chaque école épistémologique, non pas une définition carrée et unique, mais plutôt des définitions de la science ou des sciences. Le philosophe est celui qui reçoit activement, c'est-à-dire celui qui interroge, de façon critique, les outils de la pensée que sont les notions, les catégories, les concepts en vue d'une communauté de pensée.

Cette tâche, qui revient historiquement à la philosophie, fait partie du registre de l'épistémologie en tant qu'elle s'alimente des données et des faits de l'histoire des sciences. Si la définition du champ scientifique relève de l'ordre de la philosophie, c'est parce qu'on l'inscrit dans un rapport traditionnel dans

lequel sciences et philosophie sont difficilement séparables, comme le précise Jean Toussaint Desanti (cf. *La philosophie silencieuse ou critique des philosophies des sciences*, Paris, Editions du seuil, 1975, chapitre II). Dans la perspective d'une philosophie considérée comme l'alfa et l'oméga de toutes connaissances, on peut évoquer, au moins, cinq formes principales d'administration de la science par la philosophie. En guise d'illustration des formes d'administration, on peut évoquer les **modes d'intériorisation de la science par la philosophie. A travers l'histoire de la philosophie, on retient quelques** exemples significatifs:

- l'intériorisation à l'Idée (Platon),
- l'intériorisation à l'entendement (Descartes),
- l'intériorisation au sujet (Kant),
- l'intériorisation au concept (Hegel),
- l'intériorisation à la conscience (Husserl).

Ces indicateurs d'intériorisation de la science par la philosophie reposent sur des présuppositions au regard desquelles on court souvent des risques de simplifications excessives et de dogmatisme liés naturellement aux définitions « clôturantes » ou réductionnistes de la science. Ces exemples ont en commun de marquer qu'aucune science n'échappe pas à la dimension spéculative qui sont un trait de la « foi » des savants et du besoin d'un « socle ou d'un fondement ferme » que rejette la tradition empiriste et positiviste (aspect évoqué plus loin, dans la dernière partie).

Comme on le voit, des difficultés surgissent de toutes parts dans la quête d'une définition du terme « science ». Pour les surmonter, il faut prendre des précautions supplémentaires. Ces précautions (historique, sémantique, heuristique, logique, méthodologique, épistémologique, paradigmatique, etc.) ont une importance dans la mesure où on pense que la signification véritable de la science, c'est d'être une méthode de pensée et d'action caractérisée par le refus de s'en tenir aux apparences, la recherche de la rigueur, la systématisation des connaissances fragmentaires, la testabilité ou la réfutabilité.

Aussi pour éviter les confusions et autres amalgames, des épistémologues ont dû ériger des critères de distinction. C'est le cas de Platon qui sépare « doxa » et « connaissance ». Gaston Bachelard reprend cette distinction en demandant qu'on élimine un premier niveau de difficulté constitué par la « connaissance vulgaire », la « connaissance préscientifique » qu'il convient de séparer d'avec

la « connaissance scientifique ». La distinction appelle l'usage de critère démarcatif à appliquer parce qu'il est motivé par l'urgence d'une communauté de pensée. Chez d'autres épistémologues, on va plus loin. On procède à la distinction entre les sciences et certains domaines non-scientifiques qui expriment pourtant des prétentions cognitives ou explicatives, comme c'est le cas, selon le principe de la falsifiabilité de Karl Popper, de la psychanalyse, l'astrologie et du marxisme.

Pour être sûrs que nous parlons des champs de rationalité scientifique qui ont été bien constitués dans l'histoire de la pensée humaine, on a procédé à des classifications des sciences qui, il faut l'avouer, sont d'inégale importance épistémologique.

1.1) Quelques styles de classification des connaissances

Il existe bien plusieurs tableaux de classification des sciences fondés sur des critères bien différents, parce qu'on peut se fonder sur le but du savoir, les facultés humaines, l'objet de la science, la simplicité, l'unité de la science, la méthode, etc.

- **Le but du savoir humain:** Aristote assure dans son ouvrage de *Métaphysique* (1025b) que « *toute pensée est pratique ou poétique ou théorique* ». D'où on retient la classification du savoir en trois groupes : a) **les sciences théoriques** dont le but est de faire connaître et d'expliquer les choses. Ce sont les mathématiques, la physique et la philosophie première ou métaphysique ; b) **les sciences pratiques** qui ont pour rôle de diriger l'homme , soit dans sa vie personnelle (éthique ou morale), soit dans sa vie familiale (économie), soit dans sa vie sociale ou politique (politique) ; c) **les sciences poétiques** dont le but est la production d'œuvres littéraires. Il s'agit de la rhétorique, la poétique et de la dialectique ou la logique.

- **Les facultés humaines:** Francis Bacon (1561-1626) et Leibniz ont pris pour critère les facultés humaines. Ils distinguent ainsi, pour ce qui concerne Bacon, trois groupes de sciences. Il s'agit, a) des sciences de la mémoire (histoire civile et histoire naturelle) : b) les sciences de la raison (philosophie, c'est-à-dire l'ensemble du savoir articulé sur Dieu, l'homme et la nature) : c) des sciences de l'imagination (poésie, histoire civile,

histoire naturelle, fables). Concernant Leibniz, il faut se rapporter à un texte tiré des *Nouveaux essais sur l'entendement humain* de Leibniz.

- **l'objet de la science:** André Marie Ampère (1775-1836) divise les sciences en deux grands groupes : a) les sciences cosmologiques ou du monde matériel et b) les sciences noologiques ou de l'esprit. Sa division dichotomique des sciences lui permet d'en dégager, au total, 128 sciences différentes.
- **la simplicité :** selon l'expression du physicien Jean Perrin (1870-1942. Prix Nobel de Physique en 1926), la pensée scientifique démontre le caractère illusoire de l'apparence et cherche une explication « du visible compliqué par l'invisible simple ». Jusqu'à l'introduction du « complexe », la pensée scientifique a fonctionné sur la base du simple.
- **l'unité ou l'unification des sciences.** On trouve cette idée chez Descartes (*Règles pour la direction de l'esprit*, Règle I). Sous la forme de science unitaire, cette même idée devient un critère retenu chez les néo-positivistes du Cercle de Vienne et leurs épigones qui ont tenté de réaliser la constitution d'une « théorie de l'unité de la science » intégrant avec un même statut épistémologique toutes les disciplines depuis les mathématiques jusqu'à la sociologie.
- **la consistance rationnelle** (Patrick Peccatte, *La consistance rationnelle : critique de la raison démarcative*, Paris, Aubin Editeur, 1996).
- etc.

1.2) Quel est l'intérêt philosophique d'une telle classification des sciences?

On dégage plusieurs niveaux de motivation dont deux types retiennent notre attention: il s'agit de l'intérêt **historique et de l'intérêt épistémologique**

Tout essai de classification ou de coordination des sciences offre, d'un point de vue historique, l'image assez fidèle de l'état des sciences d'une période donnée. Une table des connaissances humaines ne s'épuise ni dans son caractère de catalogue des productions du génie humain, ni dans sa présentation méthodologique. Elle est une coordination panoramique ou synoptique comportant trois aspects : i) le premier fait état des lieux c'est-à-

dire de l'état actuel des sciences. ii) **Le second est tourné vers le passé** qu'on s'efforce de synthétiser. L'inventaire ainsi réalisé favorise l'histoire des sciences ; iii) **le troisième, quant à lui, est tourné vers l'avenir tout en se nourrissant des données de l'histoire.** Dans ce cas, la classification devance l'état réel des sciences. La classification des sciences opérée par Bacon est loin de clore une ère de production scientifique. Elle ouvre plutôt la période des recherches scientifiques modernes. La classification de Bacon est un programme à réaliser et non un tableau des acquisitions effectives. C'est une réponse à Descartes qui proposait un programme obligatoire de recherche caractérisé par un double souci : l'unité du savoir et l'exigence d'une fondation ou d'un fondement métaphysique à toute connaissance humaine à travers l'arbre de la connaissance (cf. Préface des *Principes de la philosophie*).

D'un point de vue épistémologique, les systèmes de classification des sciences relève des considérations méta-scientifiques. Loin de conduire à la découverte des lois des phénomènes, ces systèmes de classification favorisent plutôt l'analyse de l'essence des sciences, leur hiérarchisation, leurs approches méthodologiques, l'ordre de leurs rapports logiques immanents, etc. Aussi, convient-il de souligner leurs limites. Par exemple, Cournot trouve la classification de Comte insuffisante et la reprend et la modifie pour l'adapter à l'état actuel du développement de la science (cf. A-A. Cournot, *Essai sur le fondement de nos connaissances et sur le caractère de la critique philosophique*, Paris, Vrin, pp 401-415). Il en est de même pour Jürgen Habermas qui, dans son ouvrage intitulé *La Technique et la science comme idéologie*, (1968, Traduction française et introduction de J. R. Ladmiral, Paris, Gallimard, 1973), rompt avec la typologie traditionnelle. Pour la mettre en crise, il y introduit des catégories épistémologiques liées aux différents « invariants anthropologiques » qui constituent, selon lui, les divers pôles d'utilisation du savoir : le travail, la communication, la domination. En gardant présents à l'esprit ces trois points d'ancrage des intérêts de la connaissance, on peut distinguer les trois continents épistémologiques suivants :

- **les sciences empirico-analytiques** qui ont un intérêt essentiellement technologique et se rapportent à un invariant anthropologique : le **travail**.
- Les sciences historico-herméneutiques manifestent un intérêt pratique en matière de **communication**

- **Les sciences critiques** (dont les prototypes sont le marxisme et la psychanalyse) ont un intérêt émancipatoire et se ramènent donc à un invariant : la **domination**.

Au fond, les classifications auxquelles nous avons fait allusion, toutes fondées sur des liens de parentés ou sur des rapports de différenciation jugés comme des critères pertinents doivent répondre à deux préoccupations d'ordre épistémologique dont voici deux:

1.3.1) en tant que tâche proprement épistémologique, la classification des sciences laisse entrevoir plusieurs liens

On entrevoit des rapports d'ordre chronologique d'apparition des sciences, de dépendance, d'ordre de complexité ou de simplicité entre les sciences elles-mêmes selon l'objet d'étude (A. Comte) et, enfin par rapport au sens même de l'évolution et des subdivisions des sciences liées à l'expression de l'expertise.

- **le rapport des sciences au réel** : on parle de sciences factuelles, de sciences formelles, de sciences axiomatisées ; de sciences hypothético-déductives, sciences cognitives, etc.
- **selon le rapport à l'objet** c'est-à-dire ce qui détermine le domaine de juridiction de chaque savoir humain : sciences formelles, sciences de la nature, sciences de l'homme et de la société, sciences du vivant, sciences de la terre, etc.
- **selon l'état de la science** : sciences taxinomiques, sciences inductives, sciences axiomatiques.

1.3.2) en tant qu'effet idéologique

On dit souvent que toute classification sous-entend un rapport, notamment celui des rapports chronologique, de supériorité (suprématie d'une science sur d'autres). Dans ce cas précis, il est fait appel à des critères soit de légitimation, soit d'exclusion ou d'intégration. Doit exclure la psychanalyse du groupe des sciences. Popper, par exemple, répond par l'affirmative. Son critère de la falsifiabilité élimine la psychanalyse du champ des sciences. Auguste Comte a aussi séparé dans sa nomenclature, les sciences authentiques, primaires ou abstraites (celles qui font des lois) et les sciences inauthentiques ou secondaires (celles qui ne font pas de lois et qui, de ce fait, sont exclues de son système de classification : les sciences pédagogiques, descriptives).

En effet, dans les cas de figure, les différents critères ainsi utilisés posent, depuis David Hume jusqu'aux positivistes logiques, un problème auquel l'épistémologie contemporaine a consacré des pages de réflexion : la démarcation (cf. Patrick Peccante, 1996, *La consistance rationnelle*, Paris, Aubin Editeur).

1.4) **La Classifications des sciences d'Auguste Comte**

Pour bien parler des sciences, il faut, d'abord, pouvoir les identifier. Les différents tableaux classificatoires offrent ainsi la possibilité de répertorier ce qui, dans le cadre du savoir humain, rentre historiquement dans le groupe des sciences. Ces différents tableaux classificatoires obéissent à des critères précis comme nous l'avons indiqué.

La classification qui retient ici notre attention est la classification des sciences opérée par Auguste Comte. Il faut insister sur le critère de complexification croissante ou de généralité croissante qui confère à la classification de Comte une cohérence et une pertinence (cf. *Cours de philosophie positive*, 2^e leçon, (Paris, Editions Garnier Le Verrier, pp. 138-161). L'auteur y offre un ensemble hiérarchisé de champs de rationalité :

Mathématique, Astronomie, Physique, Chimie, Biologie, Sociologie (initialement appelée « physique sociale »)

Il s'agit des « sciences genres » qu'on appelle aussi des « sciences-mères » en ce sens qu'elles favorisent une subdivision interne c'est-à-dire l'ouverture et l'émergence de champs de rationalité internes sous la forme métaphorique de « sciences filles » et de « sciences petites filles », etc. La **mathématique**, considérée comme une « science-mère », se diversifie, de façon interne, en deux « sciences filles » :

- **L'arithmétique** (science des nombres ou théorie des nombres) comprend l'algèbre, l'analyse, la statistique, etc.
 - **la géométrie** (science des figures ou théorie de l'espace) comprend la géométrie analytique (une invention de Descartes, cf. *Discours de la méthode*, 2^e partie. Il s'agit de l'application de l'algèbre à la géométrie), la mécanique rationnelle (étude des mouvements dans l'espace), le calcul différentiel, la géométrie projective, etc.
- i) L'exemple de la mathématique peut servir à illustrer le cas des autres « sciences-mères ». La hiérarchisation des sciences milite en faveur de la quête d'un pouvoir que procure la connaissance. Cette quête des « savants-philosophes » procède à un rejet systématique de la science

contemplative telle que semblait l'enseigner Platon. Quelques bouts de phrases de Descartes, Bacon et d'Auguste Comte susceptibles de nous édifier sur ce point qui fait de la science un véritable instrument de pouvoir de connaissance et transformation de la nature. Descartes pense que la science doit « nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature » ; Bacon conseille une approche méthodologique consistant à user de la ruse en vue de connaître la nature pour l'asservir à nos fins : « On ne lui commande qu'en lui obéissant ». Quant à Auguste Comte, il ne s'écarte point de ses prédécesseurs. Il aborde la science dans la même perspective. Il utilise une formule qui résonne comme une devise positiviste : « *savoir pour prévoir, afin de pouvoir* ». On comprend à partir de là, comment Comte s'autorise à faire la police de la science en lui interdisant les « spéculations inutiles » qui ont constitué, de son point de vue, ses principales pesanteurs à l'état théologique et à l'état métaphysique.

Ces différentes considérations inclinent à Trois remarques qu'on pourrait formuler en ces termes:

- i) les sciences identifiées posent, outre le problème de leur instrumentalisation, de nombreux problèmes autres épistémologiques concernant leur évolution, leur hiérarchisation, leur objet, leur méthode, leur résultat, leur mise en rapport par la constitution de grands ensembles relativement homogènes (sciences authentiques/sciences non authentiques ; sciences formelles, sciences de la nature, sciences du vivant, sciences de l'homme et de la société, etc.)
- ii) quand on regarde de plus près encore la classification des sciences d'Auguste Comte, on s'aperçoit que les sciences se sont développées dans l'ordre qui l'éloigne de ce qui est plus près des hommes dans la mesure où c'est ce qui était plus loin : d'abord, les cieux (astronomie) ; la terre, la vie, animale, végétale et puis le corps social et humain ; enfin, l'esprit humain.
- iii) A ces deux problèmes déjà évoqués s'ajoute un problème considéré comme spécifique dans l'épistémologie contemporaine : **la démarcation entre science et métaphysique**. Une tradition née depuis les empiristes classiques (Hobbes, Hume, Locke, etc.), entretenu par les positivistes (Comte), puis les néo-positivistes (membres du Cercle de Vienne) laisse apparaître une « chasse » aux « énoncés vides de sens ». Ils doivent être disqualifiés par l'usage de la méthode de l'analyse logique du langage, instrument privilégié

permettant de tracer une « ligne de démarcation » entre les énoncés doués de sens » et ceux qui en sont dépourvus. Un exemple :

*« Si quelqu'un dit « Dieu existe » ou « le fondement premier du monde est l'inconscient » ou encore « c'est une entéléchie qui forme le premier principe directeur des organismes vivants », nous ne lui disons pas « ce que vous dites est faux » ; mais nous lui demandons « que voulez-vous dire au juste à l'aide de ces énoncés » ? Alors apparaissent deux espèces d'énoncés : les énoncés appartenant à la science empirique dont l'analyse logique peut déterminer la signification ou, plus précisément, dont on peut réduire la signification à celle des énoncés les plus simples concernant des données empiriques et les autres énoncés, pareils à ceux qui viennent d'être cités, qui se révèlent vides de sens si on les entend à la manière des métaphysiciens » (Otto Neurath, Rudolf Carnap, Hans Hahn, *Wissenschaftliche Weltauffassung ; der Wiener Kreis*, Vienne, 1929, pp. 306-307).*

La métaphore de l'arbre de la connaissance (cf. Lettre-Préface des *Principes de la Philosophie* de Descartes) revendique l'intériorisation de la science par la philosophie. Cette indication cartésienne a connu des fortunes variées et variables selon les systèmes et les époques. Au moment où le mouvement de pensée amorce une inversion, la tendance dans l'épistémologie contemporaine peut se résumer de la manière suivante : la philosophie des sciences doit plutôt se mettre à l'écoute de la dynamique et du progrès de la pensée scientifique (Einstein, Bachelard, Popper, Bunge, etc.). Ces auteurs sont conscients d'un fait : la science ne peut pas se passer de métaphysique ou de ce que Einstein appelle les « généralisations philosophiques ». Exemple, l'atomisme.

Pour Einstein, les généralisations philosophiques doivent être fondées sur les résultats scientifiques. Une fois formées et largement diffusées, elles influencent très souvent le développement ultérieur de la pensée scientifique en indiquant, entre les nombreux procédés possibles, celui qu'il faut suivre. La révolte suivie de succès ou les ruptures (penser, par exemple, au produit de la « raison polémique » de Gaston Bachelard ; aux nombreuses et différentes géométries qui l'illustrent) d'avec la conception acceptée et dominante a pour résultat des développements inattendus et complètement différents, qui deviennent une source de nouveaux aspects philosophiques : « L'histoire de la science montre que les plus simples généralisations se sont montrées parfois fécondes et parfois non » (Albert Einstein et Léopold Infeld, 1981, *L'évolution*

des idées en physique, traduit de l'anglais par Maurice Solovine, Paris, Petite Bibliothèque Payot, p. 23).

2. L'ordre des sciences formelles

Dans la classification d'Auguste Comte, les mathématiques occupent la première place, au moins, pour trois raisons :

- a) Les mathématiques sont en première position des **six genres** de phénomènes étudiés, compte tenu de la simplicité des notions qui la constituent et qu'elles mettent en œuvre (le point, la figure, ensemble, etc.). Les mathématiques forment, avec la logique, la combinatoire, la syntactique, la **classe des sciences formelles**. Les liens entre mathématiques et logique, par exemple, sont complexes dans la mesure où la lecture de ces liens intègre des considérations à la fois techniques et philosophiques. Le **logicisme**, par exemple, opère une réduction des mathématiques à la logique (Russell, Whitehead), tandis que le **formalisme** fait de la logique une partie des mathématiques et l'**intuitionnisme** soutient une position intermédiaire, à savoir que ces deux sciences sont partiellement réductrices l'une à l'autre.
- b) Liée à la première raison, la seconde milite en faveur de l'idée d'une « *mathématicité* » de la nature, une idée théologico-métaphysique qui favorise le processus de la mathématisation des autres domaines du savoir humain. Les différents domaines du savoir humain identifiés cherchent à s'inspirer de l'intelligibilité de type mathématique porteuse des idées de sûreté, rigueur, cohérence, précision, liberté, et de l'éthique. L'étude philosophique des mathématiques réside donc non seulement dans leur caractère technique ou heuristique, mais aussi dans ce qui fait que les mathématiques sont considérées à la fois comme un instrument, un langage voire un mode de pensée. Pythagore, Platon, Aristote, Archimède, Galilée, Kepler, Descartes, Leibniz, Kant, Pascal, Comte, Cournot, ont, chacun à son époque, caractérisé le lien fort qui existe entre la philosophie et les mathématiques pour les différentes raisons évoquées.
- c) La philosophie peut-elle se passer des mathématiques? Maurice Loï, paraphrasant Emmanuel Kant, y répond : « Les mathématiques sans philosophie sont aveugles, tandis que la philosophie des mathématiques

sans mathématiques vivantes est vide » (Maurice Loi, 1982, *Penser les mathématiques*, Paris, Editions du Seuil, Avant-propos, p. 12).

En effet, la philosophie et les mathématiques sont deux types de connaissance auxquels les noms des philosophes ont toujours été associés ou mêlés. On trouve ainsi dans l'histoire des sciences et de la philosophie des noms consacrés par l'histoire : Pythagore (immanentisme), Platon (participation), Blaise Pascal (démonstration), Descartes (mathesis universalis), Leibniz (caractéristique universelle), Comte (positivisme), Cournot (probabilisme). Ces savants-philosophes forment une catégorie composée des « philosophes-géomètres ». Il y existe une autre catégorie de philosophes (par exemple, Rousseau, Kant, Hegel, Simon Weil, etc) qui ont montré un vif intérêt pour les mathématiques. Ils l'ont assimilées tantôt à discipline générale, tantôt à un langage, tantôt à un instrument voire un mode de penser. Au fond, aucun philosophe consacré par l'histoire n'est totalement resté étranger à la pensée mathématique. (voir plus loin, 3. *Quelques sujets et textes de philosophies des mathématiques*)

Quel intérêt a-t-on accordé aux mathématiques dans l'histoire des connaissances humaines? Pourquoi développer une épistémologie des mathématiques ?

En effet, nous l'avons déjà indiqué, les philosophes n'ont jamais été indifférents aux connaissances de type mathématique. La preuve ? Ils ont pensé les mathématiques et ont développé une pensée sur les mathématiques. Certains l'ont fait sans nécessairement produire une structure ou une formule mathématique (Platon, Aristote, Kant, Alain, etc.). « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre » (Platon). La *République* et le *Menon* font la promotion des mathématiques dans la formation des citoyens.

D'autres l'ont fait en leur qualité de « géomètres philosophes ». Pythagore, Thalès, Archimède, Descartes, Leibniz, Comte, Cournot. Ce qui revient à faire le partage entre ce qui relève des automatismes quasi mécaniques, de l'utilisation des techniques, des symboles, des formules, d'une part, et ce qui constitue au contraire l'expression d'une conceptualité spécifique des mathématiques en tant qu'elle s'organise dans un ordre autre que celui de la rationalité proprement spéculative.

Autrement dit, les mathématiques ont une dimension spéculative que seul le philosophe est à même de révéler bien que Wittgenstein ait affirmé que les

mathématiques et la philosophie n'ont plus rien à se dire. Or, les exemples que nous indiquons laissent penser le contraire. C'est à cette dimension que s'attèle la discussion consacrée aux mathématiques par les philosophes et qui s'articule sur deux axes fondamentaux, l'un relevant des considérations générales et l'autre, sur les philosophies qui structurent l'arrière-plan des activités mathématiques des « mathématiciens créateurs ou concepteurs ».

Historiquement, quand on se réfère soit à Platon (mathématique), soit à Aristote (logique), c'est pour évoquer l'intérêt des mathématiques pour le premier ou celui de la logique pour le second. Par où on lit une opposition de style et de pensée philosophique, selon que le privilège est accordé à l'une ou à l'autre des deux matières. Cette opposition constatée dans l'Antiquité a refait surface au XVIII^e siècle. On en trouve les traces à travers les études effectuées par Alexandre Koyré, un historien des sciences, qui présente Galilée (*L'Essayeur*) et Descartes (*Discours de la méthode*) comme ceux qui ont bien illustré la thèse du **pan-mathématisme**, c'est-à-dire la mise en œuvre des thèses de l'immanentisme pythagoricien et de la participation platonicienne, débarrassée de leur caractère mystique.

Mais peut-on véritablement privilégier l'une des deux matières au détriment de l'autre quand on sait que la logique inspire consistance, cohérence, sécurité et rigueur à toutes nos réflexions, scientifique ou non ? Les mathématiques elles-mêmes peuvent-elles se passer de la logique ? Non. Les fondateurs de la science moderne ont eu raison de présenter les mathématiques comme un instrument, un langage et un mode de pensée pour aborder la nature. L'intelligibilité mathématique confère à tous les champs de rationalité une crédibilité scientifique et éthique : « *Le nombre est incapable de recevoir le mensonge* », ou « le nombre ne ment pas », affirmait Philolaüs. Ce faisant, ces penseurs ont obtenu un résultat, savoir, fonder la connaissance humaine sur un socle solide (*théologico-philosophico-scientifique*).

Peut-on entreprendre une penser scientifique sans aucune dose de la logique ? Impossible. Concernant la logique, on étudiera non seulement la logique des concepts, des propositions, mais aussi une logique des mathématiques et une logique mathématique. On fait toujours appel à la *Logique* considérée comme un **organon** (Aristote) indispensable à toute connaissance humaine.

Quelques lectures

- Robert Blanché. 1968. *Introduction à la logique contemporaine*, Paris, A. Colin, chapitre 1^{er}, p. 31-33

- Jean Piaget. 1970. *Traité de logique*. Paris A. Colin. p. 18-21
- Bertrand Russell. 1970. *Introduction à la philosophie mathématique*. Paris. Payot. p. 231-232.

II. UN APERCU SUR L'ETENDUE DU CHAMP EPISTEMOLOGIQUE

Tout ce que nous avons indiqué jusque-là montre l'ampleur de la philosophie des sciences ou de l'épistémologie. Depuis plusieurs siècles, les sciences bénéficient d'un préjugé favorable et d'une haute estime dans l'opinion des hommes ordinaires, des consommateurs conscients, et des savants. Les sciences ont quelque chose de fascinant au point où le statut « scientifique » qu'on accroche à un énoncé ou à un raisonnement semble suffire pour lui conférer un mérite particulier, une autorité qu'il est difficile de remettre en cause. La science est-elle porteuse de la vérité ou d'une vérité ? De nouveaux domaines du savoir apparaissent ainsi dans les cursus proposés par des institutions d'enseignement et de formation. On parle alors de « sciences juridiques », de « sciences économiques », de « sciences bibliographiques », de « sciences administratives », de « sciences du discours », de « science de la forêt », de « science de la laiterie », et même, de nos jours, de « sciences mortuaires », etc. De nouveaux champs de rationalité se créent et appellent la nécessité de les distinguer, de procéder à des lignes de démarcation qui marquent les champs et limites des expertises. L'épistémologie examine, de façon critique, les visions trompeuses ou peu crédibles de la science au regard des principes qui les fondent. Ce type de discussion n'est pas nouveau puisqu'il remonte jusque dans l'Antiquité où il est reproché aux sophistes de tout mettre en œuvre pour monnayer leur connaissance considérée comme « douteuse », alors qu'eux-mêmes ne doutent jamais de ce qu'ils savent et communiquent. Platon va les tourner en dérision. Aristote met en œuvre un mécanisme rigoureux du contrôle du langage sous la forme d'une immense batterie **sylogistique**. La quête d'une communauté de penser, comme un préliminaire à toute communauté de sens et de signification, relève des exigences confiées à la philosophie, ce qui nous installe dans une tradition où la pratique l'outil logique va définir un espace de recherche : la **philosophie du langage**. Bref, tels sont les éléments qui saturent la science, le langage, la logique, l'histoire et la sociologie des sciences et qui forment l'ensemble des objets qui intéressent l'épistémologie, une discipline carrefour, qu'il convient de caractériser en quelques mots.

2.1) Considérations générales et niveaux d'organisation

Par épistémologie, il faut entendre une étude de l'« **épistémè** », c'est-à-dire du savoir, des connaissances, des sciences, termes interchangeable. Le mot « épistémologie » apparaît pour la première fois en 1096 dans le supplément du nouveau Larousse illustré et utilisé par Emile Meyerson, dans son ouvrage intitulé *Identité et réalité* (1908). De création récente (début 20^e s.), en tant que discipline autonome, l'**épistémologie** (tradition anglo-saxonne) ou **philosophie des sciences** (tradition française, Comte et Cournot) n'exprime pas sa nécessité lorsqu'on pense unanimement que la savoir qui est son objet forme un ensemble ordonné, clair et cohérent des principes, des méthodes et des résultats qui s'imposent à tout le monde comme autant de certitudes. Autrement dit, d'où viendrait la nécessité de faire intervenir l'épistémologie si on considère que tout dans la science est ordonné, clair et cohérent ?

L'épistémologie en tant qu'étude critique des sciences trouve son origine dans la théorie de la connaissance de Kant et de Descartes. En consultant les divers documents afférents à l'activité scientifique, on découvre que ces documents de référence (manuels, revues, etc.) ne présentent jamais un seul et unique visage de la science. Ce qui motive les « choix des critères privilégiés pour la présentation », les « tâtonnements dans la recherche », les « ratures », les « influences proches ou lointaines », les « obstacles surmontés » ne figurent jamais dans les résultats validés par la communauté scientifique. Et puis, on se rend compte qu'à partir des **différents paradigmes** mis en œuvre, il n'existe pas de théorie scientifique définitivement établies. Ce même constat s'applique aux méthodes d'investigation et aux résultats. On peut donc raisonnablement s'interroger sur la pertinence des principes, de la méthodologie et des conclusions, en les considérant du point de vue de leur évolution en vue d'en déterminer la valeur, l'origine, leur portée scientifique ou philosophique, etc.) ce qui constitue les trois niveaux de **l'épistémologie normative**.

Mais il existe une autre dimension de l'épistémologie, notamment, lorsqu'elle s'interroge sur la manière dont sont constituées les théories scientifiques, les relations entre les théories, le rôle du contexte social ou idéologique dans le développement de l'esprit scientifique, l'impact de la science sur société, c'est-à-dire un ensemble de questions qui intègrent des considérations logique, historique, culturelle, idéologique, sociologique, nous voici ainsi installés dans les espaces réservés à **l'épistémologie constitutive, de l'épistémologie historique** (Bachelard, Canguilhem, etc.).

2.1.1) Intérêt de l'épistémologie

Plusieurs éléments contribuent à fonder l'intérêt de l'épistémologie.

2.1.2) Quelques écoles ou courants épistémologiques

L'épistémologie est constituée d'écoles ou de courants de pensées philosophiques à l'origine desquels se dégagent trois grands systèmes apparaissant comme des édifices comportant des pièces multiples :

- Le rationalisme symbolisé par l'araignée
- L'empirisme symbolisé par le scarabée
- Le criticisme symbolisé par l'abeille

2.1.3) Quelques centres d'intérêt ou axes d'étude épistémologique

- En 2 parties : Sciences et sciences humaines
- En 3 parties : sciences physiques, sciences du vivant et sciences humaines
- En 4 parties : sciences formelles, sciences physico-chimiques, sciences du vivant, sciences humaines

2. 1.4) Epistémologie régionale

On parle d'épistémologie régionale quand le centre d'intérêt est constitué par une ou deux sciences spéciales (logique, mathématique, physique, médecine, biologie, linguistique, histoire, économie, sciences cognitives, la psychologie) porteuses de problématiques régionales dans la mesure où chaque science spéciale fait l'objet d'une étude spécifique.

2.1.5) Quelques thèmes de l'épistémologie des sciences

- L'explication, la vérification, la méthodologie, la causalité, la falsification, la découverte, l'invention, la vérité, la rationalité, la logique des sciences, les révolutions scientifiques, la continuité, la discontinuité, évolution, etc.
- Les représentations du monde, théories scientifiques, les lois scientifiques, les faits scientifiques, les principes scientifiques, les paradigmes, les obstacles épistémologiques, l'interrelation des théories, la cosmologie, l'ontologie, etc.
- Philosophie analytique, les logiques, les sciences cognitives et la philosophie, la communication, les sciences de l'esprit, l'intelligence artificielle, etc.

- Rapport sciences et non sciences, l'évolutionnisme, créationnisme, psychologisme, sciences humaines, la démarcation, la consistance rationnelle, la science et l'éthique, la science et l'idéologie, impact de la science sur la société, la culture et la science, etc.

III/ L'ÉPISTEMOLOGIE DES SCIENCES FORMELLES

Les sciences formelles constituent un espace immense dans l'ensemble des connaissances scientifiques. Il s'agit, entre autres, de la logique, de la mathématique, de la syntactique considérées comme des « sciences-mères » et qui ont la caractéristique fondamentale de transférer à toute pratique qui s'affiche comme science leur structure, leur intelligibilité, leur langage, leur mode de pensée. Elles existent d'abord comme domaines de savoir et comme méthode ou instrument de consolidation, de validation et de consistance rationnelle. A ces divers titres, l'épistémologie est tenue d'en tenir compte dans l'examen externe et interne des champs de connaissance.

Etudier les sciences formelles consiste donc, avant d'en pénétrer les moindres nuances, de les situer dans le cadre des classifications des sciences que retient l'histoire des sciences. Cette dimension transparait dans les considérations générales. Après avoir indiqué les compartiments des sciences formelles, notamment, des mathématiques, nous nous conterons à identifier les principaux systèmes philosophiques qui structurent l'arrière-plan du champ des mathématiques. Car, l'histoire des sciences mathématiques fait intervenir de nombreux philosophes et leur vision des mathématiques (Platon, Aristote, Descartes, Leibniz, Kant, Comte, etc.). Autrement dit, il s'agit non pas de faire des mathématiques, mais plutôt de parler autrement des mathématiques, dire en quelques mots, comment la philosophie opère en mathématique et dans le sens inverse aussi.

A travers ce cours, il s'agit d'indiquer aux étudiants des repères historiques, conceptuels, théoriques à partir desquels il est possible de mieux s'orienter, par exemple, dans l'étude de l'histoire et de la philosophie des sciences. Ici, nous privilégions l'expression « Logique et Epistémologie ». En effet, « pour m'orienter dans l'obscurité en une pièce que je connais, écrit Kant, il me suffit d'être en mesure de saisir un seul objet dont j'ai la place en mémoire » (cf Kant, *Qu'est-ce que s'orienter dans la pensée ?*). Pour mieux s'orienter en logique et en épistémologie, il faut être en mesure de s'appuyer sur un objet, un repère, une clef.

1. Quelques thèmes d'orientation

Les repères ou les principaux axes d'étude de la philosophie des mathématiques sont multiples. On peut s'atteler, par exemple, à discuter des thèmes ci-après :

- le sens et les caractéristiques de l'épistémologie générale dans le cadre des sciences formelles
- logique et fondements des mathématiques
- pythagorisme ou l'immanentisme (« Tout est nombre »)
- réalisme des idées (Platon pour qui la géométrie élève l'âme)
- rapports « cloturants » ou réductionnistes » des mathématiques par la philosophie
- les grandes régionalités de l'épistémologie et leurs subtilités qui se dégagent à travers les classifications des sciences
- ce qu'est une science et son parcours de sens ainsi que ses approches méthodologiques (historique, heuristique, axiomatique, etc.)
- les courants philosophiques qui structurent l'arrière-plan des sciences (réalisme, phénoménalisme, conventionnalisme, probabilisme, positivisme, etc.)
- la bibliographie utile et l'exploitation des œuvres significatives en rapport avec le sujet choisi est d'une impérieuse nécessité.
- etc.

2. Les sciences formelles : une régionalité épistémique

C'est depuis la fin du 18^e siècle qu'une « idéologie formaliste » de la rigueur (qui engagera longtemps nombre de mathématiciens et de physiciens et de philosophes sur le chemin de la méthode de l'analyse logique) prônée par les positivistes logiques que la logique et les mathématiques sont désignées sous l'expression de « sciences formelles ». Cet ensemble des sciences constitue une « régionalité épistémique » à côté des autres régionalités épistémiques que sont, entre autres, les « sciences de la nature », les sciences de la vie », les « sciences de l'homme et de la société », etc.

3. Quelques sujets et textes des philosophies des mathématiques

La thématique des mathématiques offre à la philosophie un vaste champ de réflexion concernant le fondement, le mode de pensée discursive (le type de raisonnement, de démonstration), les approches méthodologiques, la place de l'intuition, du formalisme et l'importance des composantes structurelles (principes, axiomes, postulats, définitions, théorèmes), la place de l'histoire, etc. La philosophie est devenue et reste en quelque sorte un « interprète critique » du champ théorique des mathématiques dont elle fait éclater les multiples enjeux au grand jour. « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre » lit-on sur le fronton de l'Académie. Pour être philosophe, il faut être alimenté à la sève nourricière des mathématiques. Intérêt, difficultés, clarifications sont des constructions de significations. On retient néanmoins, en guise d'illustration, quelques aspects non exhaustifs de la perception que les philosophes ont des mathématiques en termes d'arrière-plan, d'instrument, de langage, de mode de penser, de modèle d'intelligibilité :

Bibliographie sommaire

- ✓ Platon, *La République*, livre 7
- ✓ Galilée, *L'Essayeur*
- ✓ Descartes, Les règles pour la direction de l'esprit, règle 0
- ✓ R. Apéry, M. Caveing, and AL, 1982, *Penser les mathématiques*,
- ✓ Rheinberg Hans-Jorg, 2014, *Introduction à la philosophie des sciences*, Paris, Editions La Découverte
- ✓ Les enjeux mystico-théologico-philosophiques des mathématiques (Pythagore, Spinoza)
- ✓ Les enjeux éducatifs des mathématiques (voir *La République*, livre 7 de Platon, J-J Rousseau, *Emile*, livre II)
- ✓ enjeux pédagogiques et épistémologiques des mathématiques (Galilée : *L'Essayeur* / Comte : *Cours de philosophie positive*, 3^e et 4^e leçons)
- ✓ enjeux instrumentalistes des mathématiques (Galilée, Descartes, A. Comte (*Cours de Philosophie positive*, 2^e leçon : « Aujourd'hui la science mathématique est bien moins importante par les connaissances, très réelles et très précieuses qui la composent que comme constituant l'instrument le plus puissant que l'esprit humain puisse employer dans la recherche des lois des phénomènes naturels »)
- ✓ enjeux ludiques des mathématiques (Paulus Gerdes)

- ✓ enjeux scientifiques des mathématiques (Galilée, Descartes, Leibniz, Comte : références déjà indiquées)
- ✓ enjeux humanistes (Simone Weil, Réflexions sur les causes de la liberté, Paris, Gallimard, pp. 89-90: mathématiques et liberté/ Hobbes, *Le Léviathan*, chapitre II / Georg Cantor (1845-1918) a toujours pensé que l'essence des mathématiques réside dans leur liberté limitée par les exigences de cohérence/ Quant à Charles Hermite (1822-1901), il soutient plutôt qu'en mathématique, on est davantage serviteur que maître. Autrement dit, le géomètre n'a guère de liberté face aux entités que lui fournit l'intuition)
- ✓ enjeux éthiques (Philolaüs : « le nombre ne ment pas »)
- ✓ enjeux linguistiques (Galilée, Descartes, Hobbes/ Hegel, 1970, *Encyclopédie des sciences philosophiques en abrégé*, trad. De M. Gandillac, Paris, Gallimard, pp. 249-250)

❖ Quelques autres axes de recherche

- Indiquer aux étudiants les considérations mystico-théologico-métaphysiques des mathématiques (immanentisme, participation, pan-mathématisme, etc.)
- Identifier quelques voies d'accès à la connaissance mathématique : illumination (Descartes), réminiscence (le *Menon* de Platon), éducation (tuteur ou système scolaire et universitaire)
- Evoquer les mathématiques comme modèle de rigueur et de scientificité pour toutes les autres sciences
- Evoquer la dimension anthropologique, historique, axiomatique et heuristique des mathématiques. Par exemple, voir nos articles concernant les recherches MESCA)
- L'édifice des mathématiques reste-t-il totalement transparent comme le suppose la rationalité pure?

Les mathématiques sont des sciences déductives ; la certitude *a priori* des principes mathématiques fait appel aux notions de consistance d'un **« système axiomatique établi par convention »**. Les problèmes philosophiques qui en surgissent ont trait aux limitations internes des formalismes qui indiquent aussi des limitations de ce qu'est la « Raison mathématique » elle-même. En témoigne, par exemple, la théorie des ensembles et les apories ou paradoxes auxquels il a fallu faire face (Bertrand Russell).

3. Réponses philosophiques dans le cadre des sciences mathématiques

La science, en général, est-elle exempte de toute intrusion philosophique ? Le principe de la démarcation est-elle toujours de mise ? En effet, quand les savants ou les philosophes contemporains font de l'épistémologie, c'est-à-dire quand ils cherchent à définir leur conception générale de la nature et les principes qui guident la démarche théorique ou expérimentale de la science actuelle, on constate qu'ils se divisent en plusieurs groupes fondés sur des visions philosophiques radicalement différentes.

4.1) Sciences formelles et philosophie ou les postures philosophiques dans les mathématiques

Le besoin de la métaphysique lié soit à la méthodologie, soit à la détermination de l'entité scientifique ne s'exprime pas seulement dans le cadre de la philosophie des sciences de la nature. L'existence des systèmes philosophiques dans le domaine des sciences formelles (mathématiques, logique) en est une illustration édifiante. Sans rentrer dans les détails, nous en rappelons cependant les systèmes philosophiques dominants que sont le **logicisme** (Bertrand Russel, Whitehead, etc.), le **formalisme** (boubaki), l'**intuitionnisme** (Brouwer), le **constructivisme** (Kant) et le **réalisme** (Platon, Cournot, etc.).

Dans le cadre des sciences de la nature, on distingue deux grands groupes (empirisme et rationalisme) qui comportent des ramifications ou nuances internes.

En ce qui concerne les courants de philosophie dominants dans le cadre des sciences formelles, notamment, en mathématiques, nous pouvons répertorier quatre systèmes engendrés par les différentes propositions de solution apportées aux paradoxes qui ont surgi dans la quête du fondement des mathématiques. Ces difficultés sont souvent évoquées sous l'expression de **crises de fondement des mathématiques**. Le logicisme, le formalisme, l'intuitionnisme et le réalisme de type platonicien en sont les illustrations.

4.2) Logicisme

- Ouvrage fondateur écrit par RUSSEL et WHITEHEAD: *Principia mathematica*
- Voir M. Kline, « Les fondements des mathématiques », in **La Recherche** N°54 ; texte N°137, pp 303-304

Ecole fondée par Bertrand Russel et Alfred Whitehead. Le logicisme s'est donné pour objectif de résoudre les paradoxes qui existaient dans la théorie ensembliste afin de rebâtir la logique. Mais l'objectif poursuivi était aussi de fonder les

mathématiques sur la logique. Cette volonté des logicistes rejoint celle de la fonder l'analyse sur l'arithmétique.

4.3) Intuitionnisme

- Voir M. Kline, « *Les fondements des mathématiques* », in *La Recherche* N°54 ; texte N°137, pp 303-304
- Voir Robert Blanché, *L'Epistémologie*, Paris, PUF, 1972, pp. 93-95 ; Texte 138bis, pp. 309-310

Pour les mathématiciens intuitionnistes dont le chef de file est Brouwer, l'esprit humain a une intuition fondamentale, antérieure à toute construction mathématique ou logique, celle qui fait passer de n à $n+1$. C'est grâce à cette intuition que l'esprit humain conçoit la notion de nombre entier ; et c'est à partir d'elle que doivent être construits tous les êtres mathématiques.

Les intuitionnistes ont une notion de l'infini qui est différente de celle de Cantor qui, dans sa théorie des ensembles, considère *l'infini* « actuel et achevé ». C'est aussi sur la base de l'emploi en mathématique et en logique de la *notion de l'infini* que les intuitionnistes rejettent la logique classique et, en particulier, le *principe du tiers exclu*.

4.4) Formalisme

- Voir Jean Dieudonné, *Les méthodes modernes et les fondements des mathématiques*, in *Les grands courants de la pensée mathématique*, A. Blanchard, Paris, 1962, pp 550-533. Texte N° 139, pp. 310-313

L'école formaliste est la dernière tentative de fondement rigoureux des mathématiques qui s'appuie essentiellement sur la méthode axiomatique. Ce sont les intuitionnistes qui ont montré les difficultés à concevoir des notions qu'on ne saurait construire sur des ensembles infinis. Pour échapper à ces difficultés, ils décident de vider les propositions mathématiques comme les objets mathématiques, de tout contenu. Pour les formalistes, c'est la forme de la proposition qui importe, non son contenu. Ainsi conçues, les mathématiques ne consistent qu'en un bon maniement d'un certain nombre de symboles. Nicolas Bourbaki (c'est le nom d'un groupe de mathématiciens) est la figure historique de ce courant de philosophie mathématique.

4.5) Réalisme

Voir René Thom, « Les mathématiques « modernes » une erreur pédagogique et philosophique » ? in *Pourquoi la mathématique ?* Gallimard, 10/18, Paris, 1974, pp. 63-67 ; Texte N°141, pp. 319-321

La conception formaliste adoptée par la plupart des mathématiciens connaît des critiques internes qui concernent l'essence des objets mathématiques. Pour les mathématiciens qui se réclament de Platon, il n'est pas question de vider de tout contenu les objets. Pour eux, les nombres, par exemple, ne sont pas de purs symboles, car ils existent dans la réalité. « Les êtres mathématiques existent indépendamment de notre pensée en tant qu'Idées platoniciennes. Est vraie une proposition P qui exprime une relation existant effectivement entre Idées (...) ».

CONCLUSION

On pourra enfin répondre à la question capitale qui inaugure cette discussion, et qui consolide les rapports entre philosophie et mathématiques, en évoquant deux auteurs : René Descartes et André Revuz. d'abord, avec Descartes, qui parle de la liberté, de la fécondité, de la facilité, de la rigueur de l'esprit, de la nécessité de cohérence, de la simplicité et de la beauté qu'inspirent « la longue chaînes de raisons, toutes simples et faciles » auxquels aucun philosophe ne resterait plus longtemps indifférent. Secondement, nous laissons au mathématicien André Revuz de conclure sur ce que représentent les mathématiques et qui force le regard critique du philosophe:

« La mathématique n'est pas une technique rébarbative, utilisable seulement dans un domaine limité, c'est un des modes fondamentaux de la pensée humaine et à ce titre, elle est un élément indispensable de toute culture digne de ce nom. Il s'agit d'enseigner cette manière de penser sans la mutiler, sans la réduire à son seul aspect déductif, sans brimer l'imagination.... La simplicité des notions de base mises en lumière par la mathématique nouvelle, la diversité des situations concrètes dont il est possible de les dégager, leur lien étroit avec la logique dont elles permettent une étude simple, précise et féconde, en font une matière de choix pour toute la culture digne de ce nom» (André Revuz, *Mathématique moderne, mathématique vivante*, Paris, OCDL, 1963, p. 65).

Quelques exercices de contrôle

1. Combien de genres de sciences comporte la classification des sciences d'Auguste Comte ? Les sciences répertoriées sont-elles statiques ou dynamiques
2. Quelle métaphore utilise-t-on pour caractériser les sciences et leurs subdivisions internes ?
3. Pourquoi les mathématiques occupent-elles la première place dans la classification des sciences opérée par Auguste Comte ?
4. Par quel terme technique définit-on la philosophie de Pythagore ? Pourquoi ? Quelle formule utilise-t-on pour résumer la pensée mathématique de Pythagore ?
5. Donner deux noms de philosophes qui ont inscrit leur vision de la nature dans le pan-mathématisme ?
6. Citer les principaux systèmes de philosophies des mathématiques que vous connaissez tout en indiquant, pour chacun, un nom des représentants historiques du système identifié.
7. Quel nom donne-t-on à la pensée mathématique de Kant ?
8. Quelles sont les deux voies utilisées par la méthode cartésienne qui est d'inspiration mathématique ?
9. Que signifie « le livre de la nature est écrit en langage mathématique » ? De qui est cette idée ?
10. Quelles sont les deux grands domaines des mathématiques ? Quelles théories traite chaque domaine ?
11. Pourquoi parle-t-on de sciences formelles ? Donner deux exemples de sciences formelles.
12. Dans quel ouvrage de Platon il est question des mathématiques et de la formation des gardiens de la cité ?
13. Les mathématiques peuvent-elles rentrer dans la catégorie des « sciences authentiques » ?
14. Que recherche-t-on en opérant par la voie de l'inférence statistique en sociologie ? En Psychologie ?
15. Comment expliquez-vous la mathématisation des sciences de la nature ?

Lire attentivement et encercler la ou les bonnes réponses. Sans aucun autre document.

1. **Combien de genres de sciences comporte la classification des sciences d'Auguste Comte ? (1 pt)** a) 5 b) 6 c) 7
2. **Quelles sont les caractéristiques correspondant aux sciences répertoriées par Auguste Comte ? (1 pt)**
a) Authentiques b) statiques c) dynamiques.
3. **Pourquoi les mathématiques occupent-elles la première place dans la classification des sciences opérée par Auguste Comte ? (2 pts)**
a) Ordre chronologique d'apparition b) forme retenue par Bourbaki
c) notion simple et meilleure intelligibilité de la nature
4. **Par quel terme technique définit-on la philosophie de Pythagore ? (2pts)** a) immanentisme b) immanence du nombre à la nature c) rejet de toute transcendance des nombres
5. **La théorie des nombres intègre-t-elle une dimension éthique ? (1pt)**
a) oui b) non c) peut-être
6. **Quels sont les points intéressés par le constructivisme ? (2 pts)**
a) la pensée mathématique de Kant b) courant épistémologique qui considère que la connaissance de la réalité est le reflet de l'interaction de l'esprit humain et les phénomènes c) philosophie mathématique qui prouve l'existence d'une figure à partir de sa définition et de sa construction
7. **Y a-t-il un intrus parmi ces domaines relevant de sciences formelles ? (1pt)** a) la syllogistique b) la logique mathématique c) la syntactique
8. **Que vous inspire le logicisme ? (2 pts)** a) tentative de réduire les mathématiques à la logique b) attitude préférentielle envers tout ce qui est logique c) philosophie mathématique de Bertrand Russell
9. **Quelles sont les voies privilégiées dans la méthode cartésienne d'inspiration mathématique ? (1 pt)**
a) Intuition b) déduction c) raisonnement
10. **De qui est cette idée ? : « le livre de la nature est écrit en langage mathématique » (1pt)** a) Copernic b) Koyré c) Leibniz
11. **Quels sont les philosophes dont la vision de la nature s'inscrit dans le pan-mathématisme ? (2pts)**
a) Galilée b) Pythagore c) Descartes
12. **De quelles sciences l'algèbre est-t-elle petite-fille ? (1pt)**
a) mathématique b) arithmétique c) calcul différentiel
13. **Quel philosophe insiste sur l'importance des mathématiques dans le cadre de la formation des gardiens de la cité ? (2pts)**
a) Platon b) Comte c) Descartes

14. **Quelle est l'approche mathématique exploitée dans le cadre des recherches en sociologie ? (1pt)** a) inférence statistique b) logique mathématique c) calcul des probabilités