

**ANNÉE ACADÉMIQUE 2019-2020**



**U. F. R. SCIENCES DE L'HOMME ET DE LA SOCIÉTÉ**

---

**DÉPARTEMENT DE PHILOSOPHIE**

*Cours de Prof Gbocho Akissi*

*Niveau M2RC*

***INTRODUCTION AUX LOGIQUES POLYVALENTES***

## 1. Les paradigmes de la logique formelle.

La logique, au sens où ce terme sera défini tantôt, est une science, car de quelque nature qu'elle soit ou qu'on la conçoive, elle dispose d'objet, de méthodes et de règles soit de dérivation, soit de transformation, si ce n'est les deux, méthodes et règles étant des procédures ou des dispositifs de testabilité formelle.

Trois différents paradigmes principaux meublent, dans l'ordre d'occurrence, l'histoire de cette science : le paradigme syllogistique, le paradigme axiomatique et le paradigme non standard.

Le premier, issu des recherches d'Aristote, ce philosophe que Karl Marx a appelé le « géant de la pensée », remonte à l'Antiquité grecque et a régné sans partage pendant des millénaires sur les cultures occidentales et orientales en modelant la philosophie. Cette hégémonie paradigmatique ne connut son déclin que seulement vers la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, supplanté par un nouveau paradigme, le paradigme axiomatique, contre lequel se développe un autre à partir des années 1920, le paradigme non standard. Quel est ce nouveau paradigme ? Qu'est ce qui explique cette succession paradigmatique ? Ces systèmes de logique formelle qui s'opposent les uns aux autres peuvent-ils cohabiter dans un même espace épistémique ? Pourquoi et comment ? C'est le projet de ce cours de répondre à ces questions et à en susciter d'autres. Nous commençons par le dernier né des paradigmes logiques : le paradigme non standard, après avoir précisé ce qu'il faut entendre par « logique ».

## 2. Qu'est ce que la logique formelle ?

Dans nos conversations les plus sérieuses et même les plus banales, nous disons ou entendons dire « C'est logique » (ou « Ce n'est pas logique »). Mais que signifie « C'est logique » (« Ce n'est pas logique »)? Veut-on implicitement dire : « Mais voyons ! C'est évident ! »? (« Ce n'est pas évident » ?) Voilà des réponses qui ne nous avancent guère en raison de leur caractère vague. En effet, que veut-on insinuer par « évident »? « Evident » par rapport à quoi ? Par rapport à des perceptions ou en vertu d'une relation avec d'autres faits ? « Evident » en quel sens ? « Pas évident » en quel sens ?

Le « C'est logique » et sa négation (« ce n'est pas logique ») dont le caractère vague et la polysémie ont suscité les interrogations ci-dessus, montrent que le mot « logique » nous est à la fois familier et étranger.

Le mot « logique », d'une certaine manière nous est familier, puisqu'il nous arrive, évaluant les propos d'un locuteur, de faire diverses observations. Nous disons par exemple,

«Je ne vois pas la logique de sa démarche» ; ou bien « Je ne vois pas sa logique ». Dans l'un ou l'autre cas, nous voulons signifier que nous ne décelons pas la cohérence ou la rationalité des propos tenus ou de la position défendue. Il nous arrive aussi, parlant de quelqu'un, de dire : « Il n'est pas logique » ou bien « Il tient des propos illogiques », incriminant cette personne de tenir des propos absurdes, incohérents, irrationnels. Nous avons probablement dit d'un locuteur qu'il a un esprit logique, c'est-à-dire, qu'il est méthodique, cohérent avec lui-même en ses actions.

Si notre appréhension du terme « logique » se réduit à ces représentations, c'est qu'il nous est encore étranger car le « C'est logique », par lequel nous avons commencé nos propos, renvoie à bien d'autres réalités sémantiques parmi lesquelles nous retiendrons cinq :

En un sens, «logique » se rapporte à « opinions », « vision du monde» d'un individu ou d'un groupe d'individus. Sous ce rapport, le mot est un raccourci sémantique pour référer à l'ensemble des croyances et des valeurs d'une communauté linguistique, d'un groupe, d'une culture, d'un peuple, d'une civilisation, d'une théorie. Les expressions courantes du genre « J'ai ma logique, vous avez la vôtre ; « logique européenne », « logique africaine », « logique asiatique », « logique bantou », « logique baoulé », « logique akyé » « logique bété », « logique sénoufo », etc., sont des emplois par défaut de « logique » pour référer aux façons de voir les choses, aux croyances et valeurs fondatrices ou explicatives des praxis individuelles ou collectives d'une communauté ontologique donnée.

En une seconde acception, « logique» se confond avec « méthode », « processus de l'activité scientifique », « conditions de possibilité » ou « démarche ». Nous en avons une illustration dans les expressions « Logique des sciences sociales » ou « logique de la découverte scientifique ». Ici le mot est synonyme de « voie » ou « chemin ». L'activité scientifique, pour s'exercer, doit emprunter un chemin, une voie, une méthode, une perspective parmi plusieurs possibles.

Une troisième entente du mot l'assimile à « quiddité conceptuelle », c'est-à-dire à la signification à la fois intrinsèque du concept et aux postures attitudeles ou comportementales que cette signification induit. Il s'agit de la nature sémantique du concept en tant que tel. Le concept de paix, par exemple, en dépit de son ambiguïté, a une signification intrinsèque qui en fait le concept qu'il est et le fait différent d'un autre concept. C'est parce que la signification intrinsèque d'un concept sert d'horizon sémantique que son ambiguïté peut-être levée dans un discours donné. Une telle signification induit un certain comportement pour autant que l'on comprenne ce que le mot signifie. L'expression « logique de la paix » impose un certain type de comportement linguistique ou attitudeal. Vous ne pouvez pas à la fois, sous peine de contradiction, prôner la paix d'un côté et faire la guerre de l'autre. Le lecteur remarquera la relation de cette seconde extension du mot « logique »

avec la première. En effet la notion de croyance ou de valeur qui auréole cette première définition se retrouve dans la troisième. Les notions de paix et de dialogue, par exemple, charrient un ensemble de valeurs et de croyances que les hommes ont tous en partage. Tout concept d'un langage donné véhicule une signification conceptuelle renvoyant à des valeurs et croyances partagées qui en éclairent l'usage et permettent d'interpréter le comportement linguistique ou attitudinal de son usager. Quatrièmement, « logique » désigne l'organisation structurante d'un espace donné. L'on parle par exemple de « Logique des villes ». Cette dernière expression est ambiguë car elle peut renvoyer non seulement à la première et à la troisième définition de « logique » ; elle peut aussi signifier: « C'est comme ça que ça se passe dans une ville ». « C'est ça la ville ! ».

Nous en arrivons enfin à la caractérisation familière de la logique, celle qui rattache le concept de logique à celui de démonstration, ou plus généralement de « opération de l'esprit ».

Valeurs et croyances, méthode, quiddité, organisation structurante et démonstration ou opération de l'esprit, voilà les principaux rameaux de la logique dont nos constructions intellectuelles et nos comportements sont les fleurons. Mais, peut-on se demander : « Qu'est-ce que ces différentes acceptions ont-elles de commun pour que nous les subsumions sous le même concept de « logique » ? En guise de réponse, nous dirons qu'il en est ainsi par ce qu'elles ont toutes en partage la notion de « cohérence ». Une démonstration est cohérente dans le processus méthodique qui conduit des postulats ou axiomes aux conclusions. Une méthode est cohérente aussi bien dans sa conception que dans son application. Un concept reste identique à lui-même, en dépit de ses ambiguïtés qui ne sont d'ailleurs pas incompatibles les unes avec les autres. Il en est de même des croyances et des valeurs. L'homme reste cohérent avec lui-même en ses croyances et valeurs aussi longtemps qu'il n'y a pas renoncé. Le lecteur aura remarqué l'intimité épistémologique relationnelle entre « logique », « croyances » et « valeurs ».

Nous retiendrons la dernière extension de « logique », celle qui renvoie à la notion de « démonstration » et signifie « opération de l'esprit », c'est-à-dire « combinatoire », « calcul ».

Dérivant de *logos*, c'est-à-dire à la fois « raison » et « langage », la logique est l'opération de l'esprit portant sur le discours, que ce soit le discours ordinaire ou le discours scientifique, l'un ou l'autre renvoyant à la croyance. On la conçoit comme étant la science du raisonnement en ce qu'elle détermine, à l'aide de règles, de lois et d'autres conditionnalités, les conditions de vérité ou de fausseté de propositions composées aussi bien que les conditions de validité ou de non validité de raisonnements.

Voici, à cet égard quelques définitions que rapporte Philippe THIRY dans son élégant ouvrage *Notions de logique*.

« La logique...est une science qui détermine quelles sont les formes correctes (ou valides) de raisonnement ». J. DOPP in *Notions de logique formelle*, Introduction.

« Logic is ... the examination of that part of reasoning which depends upon the manner in which inferences are made... It has nothing to do with truth of the facts, opinions or presumptions, from which an inference is derived”. De Morgan in *Formal logic*, chap. 1 (« La logique est l'examen de cette partie du raisonnement qui dépend de la manière dont on forme les inférences... Elle n'a rien à avoir avec la vérité des faits, des opinions ou des présomptions, desquels l'on dérive une inférence ». Notre traduction du texte ci-dessus).

Dès lors, « on pourrait définir la logique comme la science des règles qui légitiment l'emploi du mot « donc », c'est-à-dire le passage de prémisses à conclusions...

### I. **Classification didactique des logiques polyvalentes ou paradigmes non standard**

A partir des années 1920 apparaissent des paradigmes de logique formelle totalement différents des deux premiers et qui ont tous pour ambition épistémologique d'édifier des systèmes de logiques non binaires, véritables alternatives à la logique standard, logique classique aristotélicienne caractérisée par la bivalence. Ces types de logique sont appelés « logique non standard », « logiques polyvalentes », « logiques plurivalentes », « logiques multivaluées » ou « logiques multivalentes », (traduction anglaise de « multi-valued ») ou « logique déviante » selon l'expression de Quine. La raison est simple : La valeur de vérité des propositions de ces systèmes logiques n'est plus celle du vrai ou du faux. On ajoute à ces deux valeurs une troisième, et des opérateurs comme nous le verrons ultérieurement.

Les logiques polyvalentes sont apparues à la suite de travaux de logiciens qui soit, ont mis en doute certains des principes classiques de la logique bivalente, notamment le principe du tiers exclu, soit ont introduit des modalités dans les propositions logiques, en conformité avec certaines dimensions linguistiques.

Alternatives aux logiques classiques aristotélicienne et axiomatiques, qui sont toutes deux **bivalentes**, en ce que en chacune d'elles, toute proposition sensée est soit vraie soit fausse, ces logiques non standard ont chacune une histoire rattachée à un contexte épistémique. Parmi elles, figurent :

#### 1. Logiques trivalentes

Les logiques trivalentes sont des systèmes de logique à 3 valeurs de vérité : le vrai, le faux et l'indéterminé. Elles remontent à Aristote, face à des propositions du langage appelées « futurs contingents ». Elles réapparaissent avec les phénomènes liés à la physique quantique dont la nature demande un état de connaissance autre que celui du « vrai ou faux. » Elles viennent également des travaux du logicien polonais [Jan Lukasiewicz](#) qui rejette le principe tiers exclu pour s'opposer au déterminisme. Un autre exemple du rejet de ce principe est le paradoxe du [chat de Schrödinger](#) qui introduit un exemple en physique. Les logiques trivalentes concernent des contextes philosophiques et d'épistémologie de science physique.

## 2. La logique intuitionniste

Elle rejette le principe du tiers-exclu pour des raisons mathématiques.

## 3. La logique floue.

La [logique floue](#), comme son nom l'indique, porte sur les valeurs combinées de l'imprécision et de l'incertitude et utilise, comme variables, non le vrai ou le faux mais, des réels entre 0 et 1. Elle tient compte de divers facteurs numériques dans une prise de décision acceptable.

Elle est utilisée dans des domaines aussi variés que l'[automatique](#), la robotique, la gestion de la circulation routière, le contrôle aérien, l'environnement (météorologie, climatologie, sismologie analyse du cycle de vie, la médecine (aide au diagnostic), l'assurance sélection et prévention des risques.

## 4. Les logiques modales

Les logiques modales sont celles qui désignent une manière spécifique dans le rapport du prédicat au sujet dans une proposition logique. La modalité introduite spécifie les qualités du vrai ou du faux. Elles sont classées en

### 4.1. Modalités aléthiques

Les modalités aléthiques portent sur la vérité de la proposition ou de l'énoncé sur le plan du possible, du nécessaire ou de l'impossible. Elles sont dites aristotéliennes ou classiques et ont pour valeurs quatre modalités :

- Le [nécessaire](#) (ce qui ne peut pas ne pas être vrai)
- Le [contingent](#) (ce qui peut être faux)
- Le [possible](#) (ce qui peut être vrai)
- L'[impossible](#) (ce qui ne peut pas ne pas être faux)

#### 4.2. Les modalités épistémiques

Ces modalités sont liées à la connaissance et portent sur :

- Le connu
- Le contestable
- L'exclu
- Le plausible
- La connaissance commune du groupe
- La connaissance partagée du groupe

#### 4.3. Les modalités déontiques

Elles traitent des problèmes moraux et se rapportent à ce qui est :

- Obligatoire
- Interdit
- Permis
- Facultatif

#### 4.4. Les modalités temporelles

- Toujours
- Jamais
- Parfois
- souvent
- demain
- un jour
- jusqu'à ce que
- un jour passé

#### 4.5. Les modalités doxastiques

Elles portent sur les croyances et ont pour modalités :

- cru (noté B de l'anglais Belief)
- Croyance commune du groupe

#### 4.6. Les modalités contrefactuelles

Ces modalités portent sur ce que l'on appelle les conditionnelles irréelles ou contrefactuelles. Par exemple, bien qu'on sache que A est irréal, n'est pas vrai, on dit cependant « Si A était vrai... »

#### 5. La logique des mondes possible de Saül Kripke

## II. LES LOGIQUES TRIVALENTES

### II1. Contexte épistémique

L'emploi du pluriel vient de ce que les chemins qui mènent à la logique trivalente sont différents quoique les formalisations soient identiques. Comme son nom l'indique, la logique trivalente est un système formel portant sur 3 valeurs de vérité contrairement à la logique classique, bivalente dans laquelle ce sont deux valeurs de vérité qui affectent une proposition, à savoir le vrai et le faux.

Les logiques trivalentes connues prennent leur source dans la logique d'Aristote qui, au chapitre 9 de *De l'interprétation* introduit une proposition portant sur le futur : « Il y aura demain une bataille navale ou il n'y en aura pas ».

Il est difficile de répondre de façon pertinente, et même impossible de répondre à coup sûr, à cette question, sans risque d'erreur. Une réponse pertinente est toujours difficile parce qu'elle exige une connaissance approfondie de la situation. Et une réponse certaine est impossible parce que même la connaissance la plus approfondie laisse échapper des impondérables susceptibles de renverser la prévision. Aristote s'est évertué à y répondre de manière à préserver le principe du tiers exclu à l'aide d'une modalisation.

*Chaque chose, nécessairement, est ou n'est pas, sera ou ne sera pas, et cependant si on envisage séparément ces alternatives, on ne peut pas dire laquelle des deux est nécessaire. Je prends un exemple. Nécessairement il y aura demain une bataille navale ou il n'y en aura pas ; mais il n'est pas nécessaire qu'il y ait demain une bataille navale, pas plus qu'il n'est nécessaire qu'il n'y en ait pas. Mais qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas demain une bataille navale, voilà qui est nécessaire.*

C'est au logicien polonais Lukasiewicz que nous devons la première formulation de la logique trivalente. Il tient pour évident qu'Aristote limite le principe de bivalence aux énoncés portant sur le passé, le présent et les choses nécessaires. Il en est autrement pour les propositions portant sur les événements futurs contingents, dit Aristote, c'est-à-dire pour les propositions dont la vérité est possible ou non. Aristote fut donc le premier à reconnaître la faiblesse du principe du tiers exclu puisqu'il admit ses lois de la logique binaire ne s'appliquent pas à des événements futurs (De Interpretatione, ch. IX). Cependant, il ne mit sur pied aucun système de logique pour



expliquer cette remarque isolée, ce qui conduisit Łukasiewicz à conclure que de telles propositions ne sont ni vraies ni fausses.

La seconde orientation de la logique trivalente vint de Erwin Schrödinger qui, en 1935, propose une expérience de pensée sous le nom de « paradoxe du chat de Schrödinger ». Cette expérience de pensée vise à mettre en évidence les difficultés théoriques et interprétatives de la mécanique quantique.

Schrödinger imagine une situation dans laquelle un chat et un « dispositif infernal » sont enfermés dans une boîte. Le dispositif est composé d'un atome radioactif et d'un système mécanique conçu pour libérer un poison mortel dans la boîte dès lors que l'atome s'est désintégré. Selon l'interprétation courante de la théorie quantique, l'atome radioactif est dans un état qualifié de « superposé ». Il s'agit d'une combinaison de deux états bien déterminés (état « désintégré » et état « intact »). L'interprétation de cette superposition, bien que surprenante, semble être que l'atome radioactif est « à la fois intact et désintégré ». Tel qu'est conçu le dispositif, l'état de l'atome radioactif (« intact » ou « désintégré ») conditionne l'état du chat enfermé dans la boîte (« vivant » ou « mort »). La conclusion du scénario imaginé par Schrödinger est que l'état du chat dans la boîte doit être interprété comme « à la fois vivant et mort ». Cela se rapproche du futur contingent. On ne peut rien en dire au moment où on l'énonce.

## 12. Quelques exemples de systèmes formels trivalent

### **Exercice**

Faire parvenir les tables de vérités des opérateurs logiques dans le cas de la logique trivalente

### III. Logiques modales

#### Introduction

Nos propos sur le monde extérieur ne sont pas que des énoncés assertoriques du genre : « L'arbre est tombé » ; « Paul a été récompensé » ; « Pierre roule sur la voie de gauche », « Le temps est beau », etc. qui sont des énoncés affirmatifs vrais ou faux. Il nous arrive de modaliser nos propos du genre : « Il est nécessaire que l'arbre tombe » ou « Il est possible que l'arbre tombe », ou encore « Il est possible que l'arbre ne tombe pas ». « Jean sait que Paul a été récompensé » ou « Jean ne sait pas que Paul a été récompensé ». « Il est obligatoire que Pierre roule sur la voie de gauche » ou « Il est interdit de rouler sur la voie de gauche », etc.

On appelle modalité toute expression qui caractérise ou qualifie le contenu d'une proposition. La modalité peut porter sur le sujet : « La belle table est rectangulaire », ou sur la copule : « La table est peut-être carrée », ou sur le prédicat : « Le ciel est bleu foncé ».

Nous allons dans ce qui suit, présenter quelques traits de la logique modale aléthique.

#### 1. Le contexte épistémique de la logique modale aléthique

L'expression « aléthique » vient du grec « alètheia » qui signifie « vérité ». Logique modale aléthique traduit donc l'idée que des modalités spécifient les qualités du vrai, ces modalités étant « Le nécessaire » (que nous symbolisons par N), « Le possible » (P) ou « contingent » (C), « L'impossible » (on symbolise à l'aide de N, ou P et l'opérateur de la négation), etc. Par exemple l'énoncé assertorique : « Il pleut » peut être modalisé en « Il est nécessaire qu'il pleuve ». (symbolisation :  $Np$ ). On les appelle aussi « modalités ontiques » pour traduire la relation existentielle de la proposition à la réalité perçue.

La logique modale aléthique est née de l'intérêt porté par philosophes de l'Antiquité notamment Aristote et par des philosophes contemporains aux notions de nécessité et de possibilité pour des raisons philosophiques, logiques et épistémologiques. Le fondateur de cette logique non assertorique est Aristote. C'est pourquoi les modalités aléthiques sont aussi appelées modalités aristotéliennes.

Dans le *De Interpretatione* (paragr. 12 et 13) et dans les *Premiers Analytiques* (I, 3 et 13 ; I, 8-22), Aristote se demande quelles sont les négations

d'énoncés modaux et soulève, à ce propos, la question de savoir si la modalité porte sur le prédicat ou sur la phrase entière. Sa réponse sur ce second point n'est pas nette. Les médiévaux, intéressés par la logique modale, vont distinguer entre *modalité de re* et *modalité de dicto*. La modalité de re est celle où la modalité porte sur le prédicat. Exemple « L'homme est nécessairement mortel ». La modalité de dicto est celle où la modalité modifie la proposition. Par exemple, « Nécessairement l'homme est mortel ». Aristote ne formule pas explicitement cette distinction et adopte tantôt la première, tantôt la seconde interprétation de la modalité.

Le second intérêt porté sur les modalités ne date que de 1918 par un logicien américain Irving Lewis relativement à l'opérateur logique du conditionnel ou implication.

Soient deux propositions  $p$  et  $q$ . Nous savons que parmi les trois cas où le conditionnel  $p$  implique  $q$ , est vrai, il y a la condition que, si l'antécédent,  $p$ , est vrai, alors le conséquent,  $q$ , est vrai. Sous ce rapport, l'on a des propositions conditionnelles ou d'implication qui choquent ou qui sont ridicules comme par exemple la proposition « Si Yamoussoukro est la capitale de la Côte d'Ivoire alors  $2 + 2$  font  $4$  » puisque chacune des deux propositions est vraie. L'on rejette une telle vérité puisque l'on ne voit aucun lien entre les deux propositions constitutives. Il faut, pour une logique du bon sens, fait observer Lewis, que  $q$  soit déduit de  $p$ , c'est-à-dire que la liaison entre ces deux propositions soit, non seulement assertorique mais apodictique aussi bien. De même, soit le théorème  $\vdash p \supset (q \supset p)$ . Il a, par exemple, pour interprétation : « Le vinaigre est acide implique que, s'il existe des barbus alors le vinaigre est acide » (Lewis).

Pour qu'il y ait ce lien, Lewis introduit la notion de « implication stricte ».

$P$  implique strictement  $q$ , c'est-à-dire, par définition, il est impossible d'avoir  $p$  et pas  $q$ . L'implication stricte introduit donc une connexion nécessaire ou apodictique des deux propositions simples ou composées.

Nous allons, ci-dessous présenter les opérateurs modaux et le carré des oppositions modales et terminer par quelques exercices.

### Exercices

1. Donner toutes les expressions modales des assertions suivantes en les prenant d'abord en tant que propositions simples et ensuite en les composants par

les différents opérateurs ou connecteurs logiques. Prenez la lettre C pour « contingent »

1.1. Yao a faim

1.2. Yao mange

2. Traduire les modalités suivantes suivant celles aléthiques

2.1 Il faut que Yao vienne au cours

2.2. Il faut qu'il pleuve pour que l'escargot sorte.

2.3. Yao est toujours à l'heure.

2.4. Konan est parfois malade

2.5. Il se peut que Yao soit candidat aux élections législatives à venir.

3. Donner une interprétation à chacune des modalités suivantes :

3.1.  $Np \supset p$

3.2.  $N(p \supset p)$

3.3.  $Np \supset Pp$

3.4.  $Np \supset PPp$

3.5.  $Pp \supset Pp$

3.6.  $p \supset Pp$

3.7.  $N(Np \supset p) \supset p$

ATTENTION !!! Ne pas confondre :

P (Majuscule) : opérateur de Possibilité

p(minuscule) : Lettre de proposition

Exemple :  $Pp$  signifie : « Il est possible que p » ou « p est possible »

4. Donnez des propositions assertoriques de votre cru et transformez-les en modalités ontiques.

#### IV. Logique épistémique ou connaissance commune

La connaissance est un objet d'intérêt classique en philosophie, de Platon dans le *Ménon* et le *Théétète* à la philosophie contemporaine des sciences. Mais le XXe siècle a vu l'émergence de nouveaux modes d'étude de la connaissance, fondés sur les méthodes formelles qui vont de la formalisation des propositions assertoriques de la logique bivalente à celles des propositions modales. Ces modes d'étude ont contribué et contribuent encore à clarifier notre concept de connaissance, ses propriétés, tout en en révélant par ailleurs la complexité.

Après avoir brièvement présenté la logique trivalente, la modalité aléthique, nous exposons quelques aspects de la logique modale épistémique.

Nous présentons l'objet et la nature de la logique modale épistémique, proposons quelques exemples non techniques et terminons par un aperçu de formalisation.

##### 1. Définition et contexte épistémique

Dérivée du grec *epistēmē* qui signifie « connaissance », du verbe *epístamai* ou « savoir »), la logique épistémique traite de la connaissance d'agents. Elle est dite modale parce qu'elle porte sur les modalités telles que « savoir que », « croire que », « penser que » représentées par la modalité  $K_i$  pour chaque agent. Ainsi  $K_i(p)$  signifie que *l'agent i sait que p*.

La logique modale épistémique permet de raisonner à propos de la connaissance d'un ou plusieurs agents. Autrement dit, elle permet à l'agent de raisonner sur sa propre connaissance et sur la connaissance de la connaissance d'autres agents. Un agent peut savoir certaines choses et ne pas en savoir d'autres. La logique épistémique permet de rendre compte de cet état de chose et d'en proposer une formalisation. Ses fondateurs sont Edward John Lemmon, anglais et le philosophe et logicien Jaakko Hintikka, finlandais, qui reçut en 2005 le prix dit de Rolf Schock pour ses contributions pionnières en matière d'analyse logique des contextes et concepts modaux.

Les agents ont la capacité de raisonner en prenant en compte la connaissance qu'ils ont de certaines propositions ou la connaissance des autres agents qui ont des connaissances partagées les uns avec les autres. L'on parle alors de « connaissance commune. »

Une connaissance commune est une connaissance ou un savoir partagé par un groupe d'agents : tous savent que tous partagent cette connaissance, et tous savent que tous savent que tous la partagent, etc. Le concept de connaissance commune a été introduit par le philosophe David Kellogg dans son livre *Convention* (1969). Un économiste, Robert Aumann, l'a formalisé en théorie ensembliste pour l'appliquer à la science économique et à la théorie des jeux, notamment dans le cadre de la théorie de la décision interactive ; cela lui valut d'obtenir le prix Nobel d'économie en 2005.

Par exemple, un événement est connaissance commune dans un groupe d'agents si tous les agents connaissent l'événement, tous les agents savent chacun que tous les agents connaissent l'événement, tous les agents savent que tous les agents savent que tous les agents connaissent l'événement, etc. A titre d'illustration considérons trois filles avec chacune un chapeau sur la tête. Trois petites filles sont assises en cercle, chacune portant un chapeau de couleur rouge ou blanc. Chacune observe les autres, mais aucune ne peut voir la couleur de son propre chapeau. Supposons que les trois chapeaux soient rouges. Si on demande aux trois filles si elles peuvent affirmer avec certitude quelle est la couleur de leur chapeau, toutes répondent non. Supposons maintenant qu'on leur dise qu'au moins un chapeau est rouge, et qu'on leur pose à nouveau la question. À première vue, la réponse devrait être la même puisque, chaque fille observant deux chapeaux rouges, chacune savait déjà qu'au moins un des chapeaux était rouge. La première fille à qui l'on pose la question ne peut pas répondre. La deuxième non plus. Pourtant, la troisième fille peut affirmer avec certitude que son chapeau est rouge. Pourquoi ? Chaque fille savait déjà qu'au moins un chapeau était rouge, mais lorsque le professeur le leur a annoncé publiquement, il a rendu l'information connaissance commune. La première fille observe deux chapeaux rouges mais ne peut rien en déduire. Elle révèle ainsi aux deux autres filles qu'au moins un de leurs chapeaux est rouge. La deuxième ne peut rien en déduire non plus. Or la troisième sait que si son chapeau était blanc, la deuxième aurait déduit du fait que la première ne connaisse pas la couleur de son chapeau que son propre chapeau était rouge. Comme elle ne l'a pas fait, la troisième comprend que son chapeau est rouge.

La notion de connaissance commune est définie selon certaines théories, en termes de visibilité ou observabilité. On suppose que ce qu'un agent peut voir est

connaissance commune. On imagine des situations où l'agent  $i$  ou  $j$  voit la variable  $p$  mais l'agent  $j$  ne voit pas si  $i$  voit  $p$ . Ces dispositions permettent de modéliser des scénarios tels que le problème de bavardage où des amis échangent des informations via des appels téléphoniques, ou bien le problème des deux généraux qui doivent se coordonner via une communication asynchrone non fiable.

## 2. Un autre exemple de connaissance commune

Supposons un groupe de deux agents, Aya et Konan conduisant chacun sa voiture sur une route de Cocody ; supposons également qu'ils parviennent à une intersection. Konan arrive sur la voie située à gauche de celle d'Aya. Celle-ci va-t-elle s'engager sur l'intersection ou non?

Le raisonnement que fait Aya comme n'importe quel conducteur est le suivant. « Je m'engage parce que le code de la route dit que je peux le faire et parce je sais que Konan ne va pas s'engager, parce qu'il sait que le code de la route ne l'autorise pas à le faire et parce qu'il sait qu'Aya qui connaît le code de la route, peut s'y engager si elle a le droit de le faire et parce qu'elle sait qu'il connaît le code de la route et qu'il ne se s'engagera que si..., etc. ».

Plus simplement, Aya va s'engager dans l'intersection parce que le code de la route l'y autorise et aussi parce qu'elle sait que le code de la route l'y autorise et aussi parce qu'elle sait que Konan sait qu'elle sait que le code de la route l'y autorise et qu'elle sait que Konan sait qu'elle sait que Konan sait que le code de la route l'y autorise et ainsi de suite. Il y a une conjonction infinie de connaissances.

Aya va s'engager dans l'intersection parce qu'elle sait qu'elle peut le faire sans danger, parce que la règle de la priorité à droite du code de la route ivoirien est une *connaissance commune* du groupe constitué d'Aya et de Konan.

## 3. Le problème du bavardage

Quand des agents veulent entreprendre ensemble, il est nécessaire et suffisant qu'ils se mettent d'accord. Autrement dit, une action commune suppose une connaissance. Cela n'est pas toujours aisé vu les programmes souvent conflictuels des agents et surtout s'ils sont nombreux. En outre, comment être sûrs que tous sont d'accord ?

Des amis se rencontrent en septembre à Bécédi-brignan, au lieu dit « Les montagnes sacrées », dans le Département d'Adzopé. Très satisfaits de leur séjour, ils se promettent de revenir un an plus tard pour escalader à nouveau les deux mystérieuses montagnes jumelles. Supposons que la date du rituel de l'escalade soit fixée au 27 septembre.

En août, ils essaient de se mettre d'accord sur une date commune pour aller quelques jours avant la date officielle de l'évènement. Faut-il aller un ou deux jours avant ? Faut-il partir le 26 ou le 25 septembre ? Supposons qu'ils ne peuvent communiquer que par téléphone. Combien d'appels faut-il pour que chacun connaisse les dates préférées des autres ?

Cette question est appelée, en anglais, le « Gossip problem » ou en français le « problème du bavardage ».

Considérons-en quelques cas.

### 3.1. Le cas de deux amis

Deux amis ont à se mettre d'accord s'il faut aller le 25 ou le 26 septembre. Combien d'appels faut-il pour savoir les dates préférées ? La réponse est simple. Un seul appel suffit pour que les dates deviennent connaissance partagée : chacun connaît les deux dates, la sienne et celle de son ami. De cet unique appel les deux dates deviennent connaissance partagée d'ordre deux : le premier ami sait que le second connaît ses dates et inversement. Ces dates peuvent devenir connaissance partagée d'ordre trois : le premier sait que le second sait que le premier sait (et inversement, le second sait que le premier sait que le second sait).

Nous pouvons généraliser, disant que les dates deviennent connaissance partagée d'ordre  $K$ , pour n'importe quel entier  $K$ .

De tels raisonnements sur les connaissances d'ordre supérieur sont fondamentaux dans l'interaction des agents : l'absence d'une telle théorie de l'esprit rend difficiles la communication et la compréhension mutuelle. Par exemple ; après une catastrophe, un attentat ou un accident grave, on peut imaginer un groupe d'amis essayant de savoir si chacun va bien. Un ami ne va pas se contenter de savoir que tout le monde va bien ; il va vouloir aussi rassurer les autres et apprécier qu'il y ait connaissance partagée d'ordre deux : tout le monde sait que tout le monde sait que tout le monde va bien); voire d'ordre trois ou au-delà.



### 3.2. Le cas de trois amis.

Si le groupe est maintenant constitué de trois amis, trois appels sont nécessaires pour arriver à la connaissance partagée d'ordre un. Par exemple Yao appelle Aya qui ensuite appelle Konan, et Yao appelle Konan. Cependant, à la fin, nous n'obtenons pas une connaissance partagée d'ordre deux : Aya ne sait pas que Yao a appelé Konan, et ignore donc si Yao connaît les dates de Konan. En effet, supposons que pendant un appel, les amis ne parlent que de dates, et non, par exemple, de l'ordre des appels qui suivront. Pour obtenir une connaissance partagée d'ordre deux, un quatrième appel doit être fait, entre Aya et Yao, ou bien entre Aya et Konan. De plus, pour optimiser les échanges, les amis ne doivent pas se communiquer les dates préférées dont ils ont eu connaissance, ils doivent également se communiquer des connaissances à propos des dates. Ainsi, lors du quatrième appel, par exemple, il faut que Yao dise à Aya que Konan connaît les dates de Yao. Sinon, il faudrait un cinquième appel entre Aya et Konan. En règle générale, pour obtenir la connaissance partagée d'ordre  $K+1$ , il faut que les amis se communiquent des connaissances d'ordre  $K$ .

### 3.3. Le cas de quatre amis

Le cas à deux amis est direct, celui à trois amis un peu complexe. Pour celui à quatre amis, quel protocole peut-on élaborer? Si le protocole est que tout le monde appelle tout le monde, alors combien d'appels faut-il ? La réponse est : six appels qui sont les suivants : Yao appelle Aya, Yao appelle Konan, Yao appelle Affoué, Aya appelle Konan, Aya appelle Affoué, Konan appelle Affoué.

On peut même avoir moins d'appels : quatre peuvent suffire. D'abord Yao et Aya s'appellent ainsi que Konan et Affoué ; ensuite Yao et Konan s'appellent ainsi que Aya et Affoué. A chaque fois, ils échangent les informations et tout le monde a ainsi le résultat en quatre appels.

## 4. Le problème des deux généraux

Le problème de deux généraux, aussi appelé problème des deux armées ou problème de l'attaque coordonnée est une expérience de pensée qui se propose de mettre en évidence les limites d'un médium non fiable et asynchrone dans la mise au point d'une action coordonnée.

Par fiabilité on entend l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données pour une période de temps donnée. C'est la probabilité de n'avoir aucune défaillance pendant la durée  $t$ .

L'asynchronisme désigne le caractère de ce qui ne se passe pas à la même vitesse, que ce soit dans le temps ou dans la vitesse proprement dite, par opposition à un phénomène synchrone. Par exemple la communication par courriel car la réponse donnée à un courriel n'est pas immédiate comme lors d'un chat.

#### 4.1. Énoncé du problème

Deux corps d'armée **W** et **B** sont situés à une certaine distance l'un de l'autre et doivent attaquer une armée **N**<sup>3</sup>. Ensemble les deux corps d'armée de **W** et **B** peuvent vaincre l'armée de **N**. Isolément chaque corps d'armée **W** ou **B** serait défait par l'armée de **N** : aucun d'eux ne pouvant attaquer seul, les généraux commandant les corps d'armée doivent coordonner leur attaque. Autrement dit, ils doivent se mettre d'accord sur le jour et sur l'heure de leur attaque. Or ils ne communiquent que par des messagers (disons à cheval) qui mettent un certain temps (asynchronisme) pour rejoindre le camp de l'autre général et peuvent être capturés par l'ennemi (absence de fiabilité). Comment doivent-ils faire?

#### 4.2. Solution au problème

Supposons que le général **W** prenne l'initiative et fixe le jour et l'heure de l'attaque. Il envoie au général **B** pour lui proposer cette heure pour l'attaque, un messenger qui mettra un quart d'heure pour le joindre et risque aussi d'être capturé. Le général **W** n'attaquera que s'il a l'agrément du général **B** qui lui parviendra aussi par un messenger qui mettra, lui aussi, un quart d'heure pour lui transmettre l'accusé de réception et l'accord de l'heure d'attaque s'il n'est pas fait prisonnier. Mais bien sûr, le général **B** n'attaquera pas seul et ne le fera que s'il sait, à travers un accusé de réception envoyé par un messenger que le général **W** a bien reçu son accord. Mais alors pour que le général **W** attaque il faut qu'il sache que le **B** a bien reçu son accusé de réception. Mais le général **B** n'attaquera que s'il a reçu l'accusé de réception de l'accusé de réception.

En conclusion : on voit que d'accusés de réception en accusés de réception, une coordination nécessite un temps infini et n'est donc pas possible.

On présente cela souvent en disant que pour que l'attaque ait lieu il faut que le général **W** sache que le général **B** sait que le général **W** sait que le général **B** sait que le général **W** sait que le général **B** sait que le général **W** et ainsi de suite jusqu'à l'infini.

L'acquisition de ce savoir itéré par **W** et **B** s'appelle la *connaissance commune*. Et l'impossibilité de l'attaque coordonnée attachée à cette connaissance dit que l'acquisition de cette dernière est impossible en employant des messagers ou des messages sur internet, ou encore que la *connaissance commune* ne peut s'acquérir par transmissions « *asynchrones* » et « *non fiables* ». Le problème des deux généraux illustre le fait qu'il est impossible de communiquer avec certitude si les canaux de communications ne sont pas fiables. En pratique, on devra donc se contenter d'atténuer les effets de l'incertitude à des niveaux acceptables.

Le général **W** pourra par exemple envoyer 100 messagers dans l'espoir qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas capturé et transmette le message. Dans cette stratégie, le général **W** attaque dans tous les cas, et le général **B** attaque si au moins un message est reçu et cette stratégie n'échoue que si les 100 messagers sont capturés.

Une autre possibilité est celle pour **W** d'envoyer une succession de messages numérotés, et pour **B** d'envoyer un accusé de réception à chaque message reçu. Si **B** reçoit au moins un message, il peut alors estimer la fiabilité du canal de communication, et envoyer lui-même un nombre d'accusés de réception en conséquence pour garantir une probabilité de synchronisation élevée (puisqu'il suffit d'un seul message et d'un seul accusé de réception pour que l'attaque soit coordonnée).

Il peut être intéressant de minimiser le nombre de messages envoyés (après tout, chaque messenger capturé est une perte pour l'armée des généraux), tout en garantissant une faible probabilité d'échec. Les généraux peuvent par exemple convenir qu'une absence de messagers est une indication que le général qui a initié le protocole a reçu au moins une confirmation et est donc prêt à l'attaque.

Supposons qu'il faille une minute au messenger pour traverser les lignes ennemies. En l'absence de réponse pendant 200 minutes, le général ayant envoyé le dernier message fera le raisonnement suivant : ou bien l'autre général a reçu mon dernier

message, ou bien 200 messagers ont été capturés en traversant les lignes ennemies. La transmission du message est donc probable.

## II. Présentation formelle de la logique épistémique.

La logique épistémique ne serait pas de la logique si elle n'était pas formalisable c'est-à-dire s'il n'était pas possible de la mettre sous une forme abstraite, calculable ou démontrable en ses représentations cognitives. Comme la logique classique qu'elle déborde par l'ajout de l'opérateur modalisateur  $K$ , comme la logique modale aléthique la logique épistémique comporte une syntaxe et une sémantique.

Nous allons ici en présenter la syntaxe, sa sémantique qui renvoie à la sémantique des mondes possible étant trop complexe pour être exposée dans ce cours d'accès déjà difficile. La syntaxe est présentée parce qu'elle illustre les considérations informelles des différents exemples que nous avons évoqués.

### II.1. La syntaxe de la logique épistémique

Comme tout système de logique formelle, la logique épistémique a une syntaxe qui comporte des formules, des règles et des axiomes, les secondes étant des procédures ou méthodes qui, à l'aide des premiers et d'autres conditionnalités, permettent de déduire ou démontrer des théorèmes.

Dans ce qui suit,  $\vdash p$  se lit : «  $p$  est un théorème »

#### II.1.1. Les règles.

##### 1. Règle du Modus Ponens (M.P)

$\vdash p \supset q$  ; or  $p$ . Donc  $q$

Le MP est la règle classique de raisonnement déductif

##### 2. Règle de généralisation épistémique

$\vdash p \supset K_i(p)$

La règle de généralisation signifie que chaque agent connaît tout théorème établi par le modélisateur.

#### II.1.2. Les axiomes

##### 1. Tautologie

$\vdash p \supset p$

Tous les théorèmes (propositions tautologiques) de la logique classique sont des théorèmes de la logique épistémique

2. Axiome **K** ou axiome de distribution.

$$\vdash K_i(p \supset q) \supset ((K_i(p) \supset K_i(q)))$$

Cet axiome signifie que l'agent peut faire des déductions à partir de ce qu'il connaît.

3. Axiome de la connaissance ou axiome de vérité **T**

$$\vdash K_i(p) \supset p$$

Si un agent connaît quelque chose alors cette chose est vraie. Autrement dit, ce que l'agent sait est vrai. Il ne peut avoir des connaissances fausses c'est-dire elles sont compatibles, sinon en réalité, du moins avec celles du modélisateur.

4. Axiome d'introspection positive ou axiome **A4**

$$\vdash K_i(p) \supset K_i(K_i(p))$$

Si un agent sait quelque chose, alors il sait qu'il sait

5. Axiome d'introspection négative ou axiome **A5**

$$\vdash \neg K_i(p) \supset K_i(\neg K_i(p))$$

Les axiomes A4 et A5 considèrent que l'agent connaît l'étendue de son savoir et de son ignorance ; c'est-à-dire il porte attention aux propositions du modalisateur.

### II.1.3. Les différents systèmes de logique épistémique

L'acceptation par les différents logiciens des axiomes et des règles donnent lieu à quatre systèmes de logique épistémique formelle.

1. Le Système **K** comprend

- Règle du Modus Ponens (M.P) :  $\vdash p \supset q$  ; or  $p$ . Donc  $q$
- Règle de généralisation épistémique :  $\vdash p \supset K_i(p)$
- Axiome A1
- Axiome A2 (axiome K)

2. Le Système **T** qui comprend

- **K** + A3 (Axiome de vérité)

3. Le Système **S4** comprend

- **T** + A4

4. Système **S5** comprend

- **S4** + A5