UNIVERSITE FHB (COCODY)

UFR Sciences de l'Homme et de la Société

Département de Philosophie

Parcours C : LOGIQUE ET EPISTEMOLOGIE

…………………………………………..

Master 1

COURS DE PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES

Thème :

« Les mathématiques comme un mode de penser la nature»

(AOUT 2020)

N'GUESSAN Depry A.

MASTER DE RECHERCHE « LOGIQUE ET EPISTEMOLOGIE »

FICHE PEDAGOGIQUE DU MASTER 1

……………………………………………………………….

- **COURS : PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES**
- **Thème : Mathématique comme mode de penser**
- Séminaire co-animé
- Population cible : étudiants inscrits en Master 1 du parcours C.

➢ **Objectif pédagogique général**

- Etudier les caractéristiques des mathématiques entendues comme mode de penser

➢ **Objectifs spécifiques**

- Permettre aux étudiants d'identifier les grandes orientations philosophiques des mathématiques
- Indiquer aux étudiants des repères anthropologiques, historiques et heuristiques des mathématiques

➢ **Résultats attendus**

- Les étudiants ont pu identifier les grandes orientations philosophiques des mathématiques et notamment le mathématisme universel ou le « panmathématisme » (Pythagore, Galilée, Descartes, etc.) et son impact
- Identification des voies d'accès à la connaissance mathématique (illumination (Descartes), réminiscence (Descartes), éducation (système scolaire et universitaire)
- Les étudiants savent les repères anthropologiques, historiques et heuristiques des mathématiques

- **Actualité de la philosophie des mathématiques**
  Cette partie est consacrée essentiellement à la bibliographie qu'il convient d'organiser de façon significative (thématique, critique, ouvrages récents, etc.).

➢ **Quelques éléments de discussion**

1) **En quels sens peut-on dire que les mathématiques constituent un instrument, un langage et un mode de penser ?**

- Qu'est-ce qu'un mode de penser ?
- Un mode de penser sûr de son langage (intelligibilité, rigueur, sécurité, etc.)
- L'univocité des concepts et des structures mathématiques liés aux règles de leur construction et de leur emploi
- Les mathématiques comme critère de scientificité pour tous les domaines constitués du savoir
- De l'intérêt des mathématiques dans l'éducation du citoyen ou valeur de l'utilité sociale des mathématiques (voir Platon, *La République, livre 7*, le *Menon*)
- L'Afrique se tient-elle hors du mode de pensée mathématique ? (voir activités de recherche de MESCA)

2) **L'édifice des mathématiques reste-t-il totalement transparent comme le suppose la rationalité pure?**

- Indiquer la place de la métaphysique et de l'ontologie à partir des philosophes de l'Antiquité. Insister sur l'immanentisme (Pythagore) et la participation (Platon)
- Identifier les grands courants de la philosophie en mathématique
  - Le logicisme
  - Le formalisme
  - L'intuitionnisme
  - Le réalisme de type platonicien

Introduction

C’est une évidence que les mathématiques constituent un espace d’intelligibilité et de rigueur auquel aucun philosophe n’est resté indifférent, laissant penser qu’il existe depuis l’Antiquité une union sacrée entre les mathématiques et la philosophie (Pythagore, Thalès, Eudoxe, Platon, Euclide, Archimède). Il suffit de se référer au livre 7 de La République de Platon, par exemple, pour comprendre à quel point la formation et l’éducation du citoyen requièrent les mathématiques. Ce même mouvement de considération s’est poursuivi à travers Galilée, Descartes, Leibniz, Newton, etc. Tantôt les mathématiques traduisent, sur le plan philosophique, un rapport d’immanence, un rapport de participation ou d’imitation, un rapport d’institution, un rapport de développement, etc. qui ne sont pas nécessairement à décrire en termes de mutations brusques, mais bien plutôt comme l’esprit qui, dans son lent mouvement se révèle à lui-même. Au fond, la discontinuité ne semble pas s’être produite dans l’évolution des mathématiques quand on peut utiliser ce terme dans la diffusion du progrès réalisés dans cette discipline. Bref, les mathématiques qui consacrent l’honneur de l’esprit humain peuvent être perçues comme un mode de penser sur de son langage. Qu’est-ce qui fait, pour le philosophe, l’attrait de ce mode de penser ? C’est donc à la description de ce langage qui allie rigueur et sécurité que nous voulons consacrer cette discussion en nous servant des exemples, d’une part, des cauris en rapport avec la structure du calcul des probabilités, et de l’autre, des collections et des relations en rapport avec la théorie des ensemble.

1. Mathématique comme : langage, instrument, esprit, liberté

Avant de fournir quelques indications sur ces points contenus dans le titre de cette section, il convient de rappeler les centres d’intérêts classiques pour la philosophie des mathématiques.

1.1) Les problèmes épistémologiques classiques des mathématiques

Parmi les questions classiques concernant l’épistémologie des mathématiques, on retient, entres autres, celles-ci :

- Quelle est la nature des êtres mathématiques ?
- Comment les mathématiques sont-elles possibles
- Comment expliquer l’adéquation des mathématiques avec le réel ?

- Quelles en sont les valeurs (valeur de vérité, valeur d'intelligibilité, de cohérence, de fécondité), la valeur d'utilité sociale ?

Ces questions sont liées, mais elles ne permettent pas de dégager une solution ou une réponse unique et commune. La position de Platon, celle de Kant ou encore celle Russell empruntent des voies totalement différentes, du point de vue philosophique. En effet, si on dit que les êtres mathématiques sont extraits de l'expérience par un procédé d'abstraction, on justifiera leur adéquation au réel ; mais on aura, du coup renoncé à la rigueur des sciences mathématiques dans la mesure où on les ramène ainsi au rang des sciences expérimentales. Il existe donc d'autres voies qui la distinguent des sciences expérimentales.

1.2) Sur le plan interne et philosophique, les mathématiques forment un espace pluriel

Les mathématiques, comme nous ne cesserons de le répéter constituent un espace de rencontres plurielles liées d'une part, à l'histoire, aux découvertes, mais aussi au développement de la matière ; et de l'autre, tout simplement parce que les mathématiques ne répugnent pas au pluralisme tel que nous l'enseigne l'axiomatique, mais aussi les philosophies qui structurent les grandes conceptions des mathématiques : **le logicisme, l'intuitionnisme, le réalisme de type platonicien, le formalisme** (Hervé Barreau, L'épistémologie, Que sais-je ? N° 1475, 4e édition, 1998, chap. 2). Le pluralisme dans les mathématiques transparaît, non seulement dans les conceptions philosophiques mais également à travers les axiomatiques (voir l'ouvrage de Blanché intitulé *L'Axiomatique*).

1.2.1) Sur le plan de l'anthropologie et de l'histoire

Dans la très longue histoire de l'humanité, si on considère que les grecs ont créé les mathématiques – les anthropologues sont formels quand ils assurent que les grecs ont eu des prédécesseurs. Il existe des documents sur les mathématiques égyptiennes et sumériennes dans lesquelles, par exemple, la règle de trois, la règle de fausse position, la résolution de certains systèmes d'équations linéaires étaient déjà pratiqués. L'absence de documents sur des civilisations plus anciennes ne signifie donc pas une absence de toute mathématique. Un système de numération, comme on le verra plus loin, si incomplète qu'il soit, est en soi, un embryon de la science mathématique. Peut-on imaginer une société humaine sans un système de numération ? Existe-t-il une langue, primitive soit-elle, qui ne témoigne d'une ébauche d'un système mathématique ? Les mathématiques constituent un mode de penser et un mode d'être en rapport avec son environnement et ses composants. Ces modes ont connu, selon les contextes historiques, des avancées, des stagnations, des développements inégaux. La diversité et la variété des cas à examiner inclinent à procéder avec une prudence mesurée à l'analyse des faits mathématiques.

Il y a, au moins, deux manières d'aborder la discussion concernant les mathématiques et qui consistent dans le double rapport d'instauration et de développement. Dans sa réalisation concrète, cette tâche peut s'effectuer, dans un premier temps, sur le **plan de l'anthropologie culturelle, de l'histoire**, par où nous savons que les mathématiques occidentales, en dépit du développement extraordinaire auquel elles sont parvenues, ne sont pas les seules mathématiques existantes. En examinant les différents processus de « mathématisation » (bases de numération, énumération, etc.) qui s'opèrent dans les civilisations humaines, on s'aperçoit que chaque jour nous faisons de la mathématique sans le savoir, même si celle-ci n'est pas portée à un niveau de maturation souhaité.

Nous pensons, par exemple, aux études réalisées par Paulus Gerdes sur les peuples Tchokyé, au Mozambique, qui, dans leurs activités de tous les jours (confection des nattes, chapeaux, construction de cases, jeux d'enfants, etc.) procèdent à des activités mathématiques. Nous pensons également au jeu de cauris qui, de son statut d'activité ludique, divinatoire, esthétique, etc., transposé sur un plan scientifique prend la figure d'une **structure mathématique** qu'est « le calcul de probabilité » ou encore le caractère d'une distinction académique (selon les rangées de cauris sur les toges académiques à l'Université Félix Houphouet-Boigny, en Côte d'Ivoire. On parle alors de « mathématiques « congélées », de l'« ethnomathématique », de la « sociomathématique », expressions, du reste, interchangeables qui constituent des programmes de recherche de plusieurs instituts de recherche situés en Afrique et en Amérique du Sud et qu'il convient de regarder comme des exemples utiles à méditer dans le cadre d'une didactique et d'une pédagogie adaptées à l'environnement socioculturel des apprenants en mathématiques.

Sur bien des aspects, ces expériences permettent de mieux cerner le processus de « mathématisation » de la nature à travers les sociétés humaines et dont parle Galilée quand il affirme que « *le grand livre de la nature est écrit en* *langage mathématique et ses caractères sont géométriques* ». L'existence des bases de numération et des systèmes d'énumération relevées dans quelques sociétés humaines sont des préalables à toute initiative de mathématisation dont le point marquant réside dans la croyance de type pythagoricien qui consiste à penser comme Pythagore que « *tout est nombre* ». L'immanence (Pythagore) ou la participation (Platon) sont deux concepts qui non seulement nous expose à un monde déjà « mathématisé », mais aussi et surtout à la nécessité de porter ce caractère primitivement mathématique de l'univers à l'universel.

1.2.2) Sur le plan de l'heuristique

La seconde manière de s'investir dans les mathématiques se situe sur le **plan de l'heuristique**, c'est-à-dire isoler les formules les plus utiles pour en déduire des conséquences et des applications immédiates. C'est cette approche qui adoptée dans la plupart des publications scientifiques et mêmes des cours. L'intérêt de l'approche heuristique tient dans le fait qu'elle est d'un usage plus courant et doit être adoptée chaque fois qu'on veut se faire une idée rapide concernant un point précis d'un problème de type mathématique.

Le caractère fondamental des mathématiques que nous y tirerons tient dans une idée majeure **: la rigueur dans les termes utilisés et dans le langage**. Comme on peut aisément s'en rendre compte, l'esprit de rigueur met en relief moins **l'objet que la méthode** et la structure mathématiques. Nous l'illustrons par l'exemple du jeu des cauris qui aboutit à la mise en œuvre du calcul des probabilités, puis, par la notion de **collection** qui, soumise à la rigueur mathématique, s'efface au profit des notions d' « **ensemble** » et de **« relation** ».

3) Le calcul et les bases de numération dans les civilisations humaines

La tradition du nombre, dans sa conception axiomatique est de récente création. Les hommes ont utilisé la quantité pendant des millénaires avant d'accéder à l'idée de nombre non seulement à mieux l'apprendre, mais aussi à la conserver. L'idée de nombre procède d'un long travail d'abstraction de la pensée. Auparavant, pour faire usage des quantités, les hommes disposaient de supports privilégiés (bois, os, etc.). Pour mémoriser, par exemple, combien il y avait de moutons, on faisait des marques (souvent des entailles) sur les supports disponibles. Ainsi, un certain nombre d'os de près de 30 000 ans ont été retrouvés. Pour assurer la fonction de mémorisation de la quantité, outre l'os, le bois, les cailloux, etc., l'homme a eu recours aux parties de son corps (doigts, orteils, bras, jambes, etc.). Toutes les civilisations ont donc développé des mécanismes ou des dispositifs matériels de numérotation (calculi, table à compter, abaques, cordelettes à nœuds (cinq siècles avant Jésus en Perse).

C'est en Mésopotamie et dans certaines zones du Moyen Orient qu'apparaissent les calculi (« calculus », c'est-à-dire des « cailloux en latin) qu'on disposait par tas. Les tas comportaient « un », « un, un », « un, un, un ». Pour éviter les difficultés liées au nombre de cailloux, les anciens eurent l'idée de faire représenter les tas par des cailloux de nature différente (couleur, forme, etc.). On retrouve chez les Sumériens vivant au sud de la Mésopotamie, au Proche-Orient) des objets fabriqués (pierres d'argile, par exemple) qui sont des calculi (4^{e} millénaire avant J-C). La grande faiblesse de ces dispositifs matériels était qu'ils ne permettaient de garder longtemps des traces du passé. C'est alors qu'apparaît la numération écrite vers 33000 ans avant Jésus-Christ, à Sumer. Les chiffres sont représentés par des symboles, par exemple, la « fleur de lotus » en Egypte. Les règles de construction varient, mais déjà, transparaissait l'idée **d'une rigueur** qu'on peut décrire ainsi :

- Il fallait permettre une lecture sans ambigüité, une même écriture ne devant pas représenter deux nombres différents
- Il fallait représenter uniquement un maximum de nombres avec un minimum de symboles.

On en vient ainsi à l'idée d'une base. Au lieu de compter uniquement par des **unités, on compte par « paquets ».** On aura ainsi les **« paquets » qu'on appelle aussi des** bases. Par exemple

- La base Décimale, c'est-à-dire « paquet » de 10. C'est la base la plus courante dans l'histoire des civilisations parce qu'elle est fondée sur **l'intuition des dix doigts de la main**. Des peuples bergers d'Afrique de l'Ouest avaient une manière de dénombrer leurs bêtes dans un troupeau. On fait défiler les bêtes les unes après les autres. Au passage de la première bête, on enfile un coquillage à une **lanière blanche**, un autre coquillage au passage de la deuxième bête et ainsi de suite jusqu'au passage de la dixième bête. A ce dixième animal, on défait le collier et on enfile un coquillage à une **lanière bleue** associée à l'idée **d'une dizaine**. Puis on recommence à enfiler des coquillages à une lanière blanche

jusqu'au passage du vingtième animal ; puis on enfile un **autre coquillage à une lanière bleue**. Si le troupeau contenait dix coquillages à lanière bleue, <u>soit cent bêtes</u>, on défait le collier des dizaines et on enfile un **coquillage à <u>une lanière rouge</u>**, réservée cette fois-ci aux centaines. Et on procède ainsi jusqu'à dénombrement total des bêtes. Au dénombrement de 258 bêtes, par exemple, on constate que huit coquillages se trouvent enfilés à la lanière blanche, cinq à la lanière bleue et deux à la lanière rouge. Il y a là un raisonnement que les mathématiciens pourraient mieux éclairer sur la base d'une structure mathématique. Mais, force est de constater que nous comptons aujourd'hui encore comme eux, mais avec des symboles différents.

L'idée de cette manière de compter réside dans le principe de groupement et du rythme des symboles de la série régulière) par dizaines (ou « paquets de dix » ; par centaines (ou « paquets de dix dizaines » ; par millier (ou « paquets de dix cents »), etc. A travers cette technique de comptage, on remarque que chaque coquillage de :

- ✓ la lanière blanche compte pour une unité
- ✓ la lanière bleue compte pour dix
- ✓ la lanière rouge constitue un groupement de cent unités (ou des dizaines)

Tel est le principe de la « numération à base dix ». Quand ce principe de coquillages et de lanières est remplacé par des mots et des signes graphiques, on obtient des numérations orales ou écrites de base dix. De nos jours, la numération écrite dont on se sert utilise des symboles graphiques que nous appelons des **chiffres arabes : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0**

Outre la base décimale, il existe d'autres bases. Il s'agit, entre autres, des bases ci-après :

- ➢ sexagésimale : 60 (base pratiquée par les Sumériens)
- ➢ vicésimale : 20 (base pratiquée par les Maya)
- ➢ duodécimale : 12 (base pratiquée par les Maya)
- ➢ quinaire : 5 (base pratiquée par les maya)
- ➢ binaire : 2
- ➢ etc.

Qu'est-ce donc qu'une base de numération ? En effet, pour symboliser les nombres, on s'est servi de deux principes majeurs : l'un appelé **cardinal** (adoption d'un « symbole-étalon » représentant l'unité et qui est à répéter autant de fois qu'elle contient des unités ; l'autre est appelé **ordinal** et consiste en une succession de symboles n'ayant aucun rapport les uns avec les autres. On dira, dans le premier cas (**nombre cardinal**): un doigt, deux doigts, trois doigts, quatre doigts, cinq doigts, etc. on les réalise juxtaposition ou superposition du nombre un. Dans le second cas (**nombre ordinal**), on parlera de premier doigt, deuxième doigt, troisième doigt, quatrième doigt, cinquième doigt, etc. qu'on peut représenter par des mots, objets, gestes, signes ou même des noms de personnes (par exemple, « N'guessan » chez les baoulé = le troisième enfant tous du même sexe) tous différents les uns les autres et qui indiquent un alignement, un rang, un ordre.

C'est à partir de ces deux principes fondamentaux que les anciens ont appris à concevoir des collections de plus en plus étendues. Avec ces collections, il est difficile de se représenter des nombres de plus en plus grands et a *fortiori* de recourir à des cailloux, bâtonnets, encoches ou nœuds de cordelettes, ou encore des doigts qui sont, du reste, des objets non extensibles à volonté. Ce sont ces collections que nous appelons un « **ensemble** » sur lesquelles on établit, à partir des règles, des relations. Comment se construit une structure mathématique ? Prenons deux exemples : le calcul des probabilités et l'ensemble.

4. Construction de structures mathématiques

Il s'agit de marquer la manière dont l'approche mathématique s'organise à partir du concret, le débarrasse de tout ce qui paraît superflu pour construire, de façon abstraite une nouvelle réalité générique que nous nommons une structure mathématique.

4.1) Les cauris et la structure du calcul de probabilité

Comment les cauris, par-delà leurs dimensions ludique, académique, esthétique et divinatoire qu'on leur confère dans l'environnement socioculturel africain, manifestent une dimension purement scientifique à travers une structure mathématique qu'est le calcul des probabilités ?

Si nous admettons, un tant soit peu, que l'univers est conçu et réalisé par un architecte divin (Descartes, Newton) sur un mode d'inscription mathématique, l'application du principe Leibnizien de la raison suffisante nous fait obligation d'admettre aussi que dans « le meilleur des mondes possibles », qu'il n'y a pas de raison qu'une partie de ce monde soit conçue autrement que sur le même mode mathématique.

L'Afrique, le continent qui fait partie de ce monde, ne peut pas ne pas obéit mêmes exigences et aux mêmes critères mathématiques. Quand même nous imaginons que, de fait, aucune contrainte ne pèse sur dieu dans ses délibérations divines, il serait incompréhensible, du moins sur un plan purement logique, que l'idée de perfection ou de bonté consubstantiellement attachée à celle Dieu n'engendrât point les mêmes implications sur la totalité de ses œuvres.

Cette impossibilité de l'arbitraire conduit à la conclusion que la nature en Afrique reste conforme aux exigences et aux prescriptions mathématiques telles qu'on les sous-entend dans l'arrière-plan des conceptions théologico-philosophiques des mathématiques. L'hypothèse d'un dieu mathématicien signifie donc, pour faire bref, qu'il y a identité et continuité dans l'idée de nature. Leibniz affirmait que « la nature ne fait pas de saut ». Ces présuppositions qui, au XVIIe siècle, ont favorisé la mathématisation ou la géométrisation de la nature sont implicitement les paramètres modulant l'arrière-plan de toute recherche mathématique. Etroitement liée à la précédente supposition, celle de l'homme créé à l'image du Créateur, fait de l'homme, de tout homme, un être naturellement mathématicien. Cette croyance, convient-il de le souligner, a eu des formulations variées et variables. Dans l'antiquité, où quelques philosophes ont développé une mystique des nombre, on est convaincu, comme Pythagore, que « tout est nombre ».

Ce trait de pensée permet non seulement de croire, dans bien de civilisations, que le nombre a un nombre, mieux, procure un pouvoir qui transcende le cadre même des mathématiques. En s'appuyant, d'une part sur la théorie des idées mathématiques que Platon développe dans le *Menon* (réminiscence) et dans *La république (livre 7, la géométrie élève l'âme vers la lumière du jour) ;* et d'autre part, sur le statut de l'ingénieur au XVIIe siècle, on est porté à croire que l'homme porte déjà effectivement en lui les « semences » de vérités mathématiques.

Descartes les caractérise comme étant « *les premières semences de vérités déposées par la nature dans l'esprit humain, mais que nous étouffons en nous en lisant et en écoutant chaque jour tant d'erreurs de toutes sortes* » (

Descartes , *Règles pour la direction de l'esprit*, IV Œuvres et Lettres, La Pléiade, Gallimard, Paris, p.49). Si le type de vérité fondé sur le nombre tient une place dans toutes nos délibérations métaphysico-scientifiques c'est parce que, comme le dit Philolaos, « le nombre, par nature est incapable de recevoir le mensonge » (Brunschvicg (l.), *Les étapes de la philosophie mathématique*, A. Blanchard, Paris, 1981, p.40).

L'avènement de l'harmonie dans le monde est la victoire du nombre sur l'infini, sur l'irrationnel, etc. Le nombre qui ne ment pas devient ainsi le principe de la vérité. La réminiscence, l'intuition et la démonstration sont les chemins par lesquels nous parvenons à la pleine lumière des vérités mathématiques qui sont enfouies en nous et qui n'attendent qu'une sorte de « chiquenaude » pour devenir manifeste. Le jeune esclave inculte dans le *Ménon* (*Protagoras, Euthydème*, *Gorgis, Ménexène, Ménon, Cratyle*, Paris, Flammarion, pp. 344-353, traduction et notes de E. Chambry) de Platon nous fournit une excellente illustration de la réminiscence. Dans cet ouvrage de Platon, la chiquenaude se réalise par la médiation de Socrate. Les conditions étant réunies (méthode, Socrate, problème) il devient facile pour le jeune esclave de réussir, de proche en proche, l'exécution du problème posé, à savoir la démonstration d'une figure géométrique dans le sable.

Dans le *Discours de métaphysique*, lorsque Leibniz veut établir que nous avons en nous virtuellement toutes les idées, il se réfère judicieusement au *Ménon* (Leibniz aurait pu se référer au texte du Phédon (74 a-75d), in Œuvres complètes, t. I, Paris, La Pléiade, Gallimard, 1963, pp.789-792). Il y a également un autre r approchement qu'on donc peut établir entre le *Ménon* et la conviction du mathématicien ivoirien Saliou Touré, lorsque celui-ci écrit notamment, qu'

« *on peut trouver des personnes illettrées capables de maîtriser l'application des concepts mathématiques dans l'exercice de leurs activités quotidiennes. Il existe donc chez nous des personnes illettrées, poursuit-il, un esprit mathématique leur permettant, même si elles ignorent les structures mathématiques de ces concepts, de dominer le sujet, de l'analyser logiquement d'une manière prospective, sans s'embarrasser de tous les facteurs qui ont contribués à la définition de ces structures* » (Saliou Touré, Préface de *Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain*, tome 1, IRMA, Abidjan, juin1984, p.1)

Dans les limites de l'analogie, il n'est pas inutile d'affirmer que les dessins *sona* des traditions *Tchokwé*, les tissages de chapeaux ou de nattes dans les sociétés africaines, les contes, les activités ludiques, révèlent incontestablement la maîtrise et l'exécution de figures géométriques par des paysans « illettrés ». Par-delà la lecture métamathématique de quelques activités et des réalisations connexes ou collatérales tels que les dessins et les tissages, les contes, les comptines, les activités ludiques ou divinatoires, la nature même des exemples choisis ainsi choisis révèle, en soi, toute une symbolique qui donne à penser qu'il y a effectivement plus que les mathématiques dans les mathématiques.

Les problèmes du fondement, la nature des êtres mathématiques appartiennent à l'arrière-plan métaphysique tel que nous l'insinuions plus haut. A la manière d'un échafaudage, il est évident que cet arrière- plan disparaît ou s'efface dès lors que l'édifice de la connaissance est achevé. Très peu de mathématiciens africains se préoccupent de cette dimension du savoir scientifique que la quête d'un schématisme mathématique ne peut éluder. Cette à l'illustration de cette autre dimension de la recherche susceptible de conférer à l'entreprise ethno-mathématique toute sa signification épistémologique que nous examinons le cas des jeux de cauris.

Hormis ce qui précède, la réponse à la question se trouve dans les textes de Doumbia Salimata et N'Guessan Depry Antoine cités dans les éléments bibliographiques. Pour construire la structure du calcul des probabilités, il a d'abord fallu que le mathématicien dégage un support assez neutre, assez incolore pour être en mesure de représenter dans les raisonnements n'importe quel objet ayant les caractéristiques d'un jeu de hasard. Aussi, en est-il de même pour la contribution décisive de Cantor qui, dans les années 1870-1880, créa la théorie des ensembles qui est à la base de l'édifice des mathématiques, aujourd'hui.

4.2) Comment construit-on un ensemble à partir des collections ?

En effet, il se produit pour les définitions d'une théorie déductive, le même phénomène que pour les propositions. Toute définition ne peut être donnée qu'à partir des termes déjà définis. Les premiers termes ne peuvent donc l'être. Le terme « ensemble » ne peut donc pas plus être défini que ne l'était celui de « point » en géométrie. Un tel terme est qualifié de primitif. On ne le définira pas, mais on indiquera à quelles règles est soumis son usage. D'autre part, on indiquera quelles situations concrètes, la notion que représente ce terme a été abstraite et comment elle peut être utilisée pour une schématisation valable de ces situations.

La notion d'ensemble est la mathématisation de la notion concrète de collection. On utilise dans le langage courant des termes désignant des collections d'objets (le mobilier d'une maison, la batterie de cuisine, le service de vaisselle), des groupe d'hommes (le régiment, la tribu, la classe sociale) et l'on rencontre aussi des collections dont les objets ne sont pas matériels (les péchés capitaux, les vertus théologales, les nombres entiers, etc.). Dans tous les cas, on distingue les éléments (la table, la casserole, l'homme de troupe, le bourgeois, la paresse, la foi, le nombre 7, etc.) de la collection que l'on considère comme **un tout**. Que demande-t-on à une collection pour la qualifier d'ensemble ?

D'abord, que chacun de ses éléments soit invariable et qu'il soit parfaitement discernable des autres, puis qu'il n'y ait aucune ambigüité sur le fait qu'un élément donné appartiennent à un ensemble donné. La question « a est-il élément de l'ensemble A » ne peut avoir pour réponse que « oui » ou « non ».
Exemple

Il y a ici trois (03) remarques à faire.

4.2.1) La première remarque tient dans le fait qu'il existe dans la vie courante des collections qui ne respectent pas les conditions définies

En effet, il est important de faire remarquer que dans la vie courante, il existe des collections qui ne satisfont pas rigoureusement aux conditions que nous venons d'indiquer. Il s'agit par exemple des classes sociales. On créera ainsi des règles administratives qui ont pour but de créer des collections nettement définies, des ensembles (par exemple, les corps de fonctionnaires, les unités militaires, etc.). Il est commode d'utiliser une notation symbolique pour exprimer la proposition « a est élément de A ». On l'écrit de la manière suivante :

$$a \in A$$

La notion $a \notin A$ signifie « *a* n'est pas élément de A ». Quels que soit l'élément *a* et l'ensemble A, des deux propositions

$$a \in A \qquad\qquad a \notin A$$

il y en a donc une seule qui est vraie, l'autre étant alors fausse.

4.2.2) La seconde remarque tient dans le fait que des collections de la vie courante, si vastes soient-elles, sont des collections finies, c'est-à-dire des collections dont « l'effectif » est caractérisé par un nombre entier naturel, tandis que le mathématicien travaille sur des ensembles infinis, tels que l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des fractions, l'ensemble des droites d'un plan, etc.

4.2.3) La troisième est liée à l'existence d'un ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle alors un « **ensemble vide** » et on note $\emptyset$. Pour le mathématicien, quel que soit l'élément a, on a toujours $a \in \emptyset$.

On parlera ainsi d'une maison vide pour signifier que l'ensemble de son mobilier *ou l'ensemble de ses occupants est un ensemble vide*.

Hormis les restrictions signalées, et la condition qu'un même être ne puisse à la fois être un ensemble et un élément de cet ensemble ; autrement dit, toute relation de type $a \in \mathrm{a}$ étant exclue, une liberté complète est laissée à l'esprit pour concevoir des ensembles.

Au fond, les quelques règles d'emploi du mot « ensemble qui viennent d'être rappelées sont nécessaires pour éviter toutes les ambigüités que se permet le langage courant. Un raisonnement qui comporte des ambigüités aboutit à une contradiction : le comique et l'absurde sont souvent la face concrète et la face abstraite d'une même contradiction. La contradiction est le totem des mathématiques.

En effet, ce que nous avons dit de l'ensemble peut être repris pour la notion de relation.

4.3) Qu'est-ce qu'une relation ?

Pour mieux faire saisir cette notion, il est utile de procéder au passage d'une situation concrète à une définition mathématique. Nous parlons couramment, par exemple, des

- relations de parenté (père, mère, frère, sœur, cousin, neveu, etc.)
- relations d'affaires (client, fournisseur, bailleur de fonds, mécène, etc.)
- relations de voisinage, relations commerciales, etc.

Y a-t-il une idée commune qui justifie l'usage du même mot dans les diverses situations et qui peut être soumis à une réduction mathématique ? En effet, on affirme qu'il y a relation lorsqu'on constate que parmi tous les couples ainsi formés, certains peuvent se rencontrer, d'autres, au contraire, sont à exclure. Les relations de parenté, par exemple, conduisent à la même idée : la relation **A** est père de **B**, permet de distinguer parmi les couples d'êtres humains, ceux pour lesquels **A** est père de **B**, de ceux pour lesquels c'est inexact. Il existe ainsi des couples qui vérifient la relation et des couples qui ne la vérifient pas. En précisant ces remarques pour obtenir une situation d'où toute ambigüité sera exclue, nous dégageons, de proche en proche, la relation mathématique qui obéit à des règles ou exigences.

Si nous disposions suffisamment de temps matériel, on aurait pu aller plus loin dans l'étude des règles qui permettent d'employer les types de relations admis par les mathématiques et qui, de ce fait, peuvent être appliqués aux ensembles et apprécier les conséquences épistémologique, historique et heuristique. Ce qu'il convient de retenir, c'est l'édiction des règles strictes qui permettent d'éviter les confusions. Au fond, la rigueur fait des mathématiques **un instrument, un langage, un mode de pensée et un espace de liberté.** A travers les exemples utilisés pour matérialiser la mise en œuvre des notions de **structures mathématiques**, nous voulions insister, un tant soit peu, sur deux points importants qui sont étroitement liés entre eux parmi tant d'autres : l'axiomatisation qui favorise le pluralisme en mathématiques.

4.3.1) L'axiomatique

En effet, si la société engendre les mathématiques, celles-ci, en retour, inculque à la société savante la nécessité d'un ordre de rigueur, l'intérêt de la précision, et surtout la liberté qu'on y découvre à partir de la **dialectique des axiomatiques**. Exemple : la géométrie euclidienne, les géométries non euclidiennes reposent sur des axiomatiques totalement différentes. Ce qui permet de mettre en relief la relativisation de la notion de la vérité absolue au profit de la cohérence. Carnap a pu dire, en tenant compte de la capacité de l'esprit humain à construire un espace valide sur la base de la cohérence ou de la non contradiction, qu' « en logique il n'y a pas de morale ». Bref, les mathématiques sont un mode de penser sûr de son langage et qui fait honneur à l'esprit humain parce qu'elles le portent vers la « lumière du jour », vers la vérité. D'où la nécessité pour Platon de recourir aux mathématiques pour former les citoyens appelés à diriger et gérer les affaires de la cité (Platon, *La République*, livre 7).

4.3.2) Les mathématiques ne répugnent pas au pluralisme

Les mathématiques nous rendent contemporains et solidaires les uns des autres, d'abord, par l'usage multiforme qu'on en fait et, ensuite, parce qu'elles se donnent à chacun de nous comme un instrument, un langage qui les constituent en mode de pensée rigoureux et favorisant par l'entremise des axiomatiques le pluralisme avec toutes les valeurs qui lui sont attachées sur le plan épistémologique, sociale et politique. Les nombreuses géométries axiomatisées en donnent un témoignage édifiant.

Bibliographie sommaire

- Brunchvicg (Léon), *Les Etapes de la philosophie mathématique*, Paris, Albert Blanchard, 1981
- Descartes (R.), *Règles pour la direction de l'esprit*, IV Œuvres et Lettres, La Pléiade, Paris, Gallimard, p.49
- DOUMBIA (Salimata), « L'expérience en Côte d'Ivoire de l'étude des jeux traditionnels africains et de leur mathématisation », in *Actes de la première université d'été européenne, Thème : « Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique »,* Montpellier 19-23 Juillet 1993, Montpellier, Edition et diffusion : IREM de Montpellier, Université de Montpellier II, pp. 549-555
- Galilée (G.), L'Essayeur,
- Couturat (Louis), *Les principes des mathématiques* (Paris, A. Blanchard, 1980)
- N'GUESSAN (Depry Antoine), « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : problématique de la vocation mathématique», in *Ethiopiques*, Revue négro-africaine de littérature et de philosophie, N° 68, Dakar, 2002, pp. 141-159
- N'GUESSAN (Depry Antoine), « Mathématiques et environnement socioculturel africain (MESCA) : regard épistémologique », in *Cahiers du Centre d'études et de*

recherche en lettres, sciences humaines et sociales (CERLESHS), N° 17, Ouagadougou, 2000, 175-195

-
- Ouvrage collectif, *Les philosophes et les mathématiques,* sous la direction d'Evelyne Barbin et de Maurice Caveing (Paris, Ellipses, 1996) pp. 193-211
- Platon, *Ménon* (*Protagoras*, *Euthydème*, *Gorgis*, *Ménexène*, *Ménon*, *Cratyle*, Paris, Flammarion, pp. 344-353 (traduction et notes de E. Chambry)
- Saliou Touré, Préface de *Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain*, tome 1, Abidjan, IRMA, juin1984, p.1
- Ullmo (Jean), *La pensée scientifique moderne* (Paris, Flammarion, 1969)
- Vergnioux (Alain), *L'explication scientifique* (Bruxelles, Editions de Boeck Université, collection « Le point philosophique », 2003).